Workshop MIG2004

Décomposition des images en composantes géométrique, texture et bruit : application aux images de la Défense

JEROME GILLES
DGA/Centre Technique d'Arcueil

Plan

- Contexte
- Cadre de travail
- Algorithme de Rudin-Osher-Fatemi
- Algorithme de Meyer
- Algorithmes numériques
- Exemples d'application
- Décomposition $u + v + w$
- Exemples
- L'algorithme de Aujol-Chambolle
- Généralisation
- Conclusion et perspectives

Contexte

- Analyse de scènes naturelles
- Détection de véhicules camouflés

Contexte

- Analyse de scènes naturelles
- Détection de véhicules camouflés

Contexte

- Analyse de scènes naturelles
- Détection de véhicules camouflés

⇒ Analyse des textures dans les images

Cadre de travail

On se place dans le cadre de l'analyse fonctionnelle pour la modélisation des textures.

$\longrightarrow$ espace BV et espace dual et normes associées (+ espaces de Besov).

L'espace BV

BV (*Bounded Variation*) : espace des fonctions à variations bornées

L'espace BV

BV (*Bounded Variation*) : espace des fonctions à variations bornées

$BV(\Omega)$: sous-espace des fonctions $u \in L^1(\Omega)$ tel que

$$J(u) = \underset{\xi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^2)}{\arg \sup} \left\{ \int_\Omega u(x) div(\xi(x)) dx \ / \ \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1 \right\} < \infty$$

L'espace BV

BV (*Bounded Variation*) : espace des fonctions à variations bornées

$BV(\Omega)$: sous-espace des fonctions $u \in L^1(\Omega)$ tel que

$$J(u) = \underset{\xi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^2)}{\arg} \sup \left\{ \int_\Omega u(x) div(\xi(x)) dx \ / \ \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1 \right\} < \infty$$

Ex : $\{\chi(\Omega_a)/\Omega_a \subset \Omega\}\,;\chi(x \in \Omega_a) = 1, \chi(x \notin \Omega_a) = 0$

Propriétés de BV

- $BV(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + J(u)$$

est un espace de Banach.

Propriétés de BV

- $BV(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + J(u)$$

est un espace de Banach.

- si $u \in BV(\Omega)$ alors $J(u) = \int_\Omega |\nabla u|$

Modèle de Rudin-Osher-Fatemi (1992)

Soit f l'image à analyser, on fait l'hypothèse :

$$f(x,y) = u(x,y) + v(x,y)$$

où

$$u \in BV(\Omega)$$

$$v \in L^2(\Omega)$$

algorithme ROF :

$$F^{ROF}(u) = \int_\Omega |\nabla u| + \lambda \int_\Omega |f-u|^2 dxdy$$

ROF (suite)

En appliquant Euler-Lagrange, on obtient :

$$u = f + \frac{1}{2\lambda} div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

ROF (suite)

En appliquant Euler-Lagrange, on obtient :

$$u = f + \frac{1}{2\lambda} div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

- v n'entre pas directement dans la minimisation de $F^{ROF}(u)$

ROF (suite)

En appliquant Euler-Lagrange, on obtient :

$$u = f + \frac{1}{2\lambda} div \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

- v n'entre pas directement dans la minimisation de $F^{ROF}(u)$
- $F^{ROF}(u) = J(u) + \lambda \|f - u\|_{L^2}^2 = J(u) + \lambda \|v\|_{L^2}^2$

Problème pour la décomposition

- ROF n'est ni linéaire en u, ni en v.

Problème pour la décomposition

- ROF n'est ni linéaire en u, ni en v.
- ROF rejete les fonctions oscillantes HF (par rapport à λ)

Problème pour la décomposition

- ROF n'est ni linéaire en u, ni en v.
- ROF rejete les fonctions oscillantes HF (par rapport à λ)
- ROF rejete de u certaines fonctions indicatrices !

Problème pour la décomposition

- ROF n'est ni linéaire en u, ni en v.
- ROF rejete les fonctions oscillantes HF (par rapport à λ)
- ROF rejete de u certaines fonctions indicatrices !
- la composante v rejète aussi certaines composantes oscillantes (à cause de $\| \ \|_{L^2}$)

Nouvelle modélisation (Y.Meyer)

On décompose l'image initiale f en :

$$f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$$

où

- $u \in BV(\Omega)$
- $v \in G$, l'espace dual de $BV(\Omega)$ (espace de fonctions oscillantes)

Modélisation (suite)

On doit minimiser :

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u| + \lambda \|v\|_G, \ f = u + v$$

Modélisation (suite)

On doit minimiser :

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u| + \lambda \|v\|_G, \; f = u + v$$

$\Rightarrow$ étude du dual de BV nécessaire

Dual de BV

L'espace dual de BV est définit par
Soit $v \in G$ alors

$$v = \partial_x g_1 + \partial_y g_2$$

où $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2), g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (on notera $g = (g_1, g_2)$)

Dual de BV

L'espace dual de BV est définit par
Soit $v \in G$ alors

$$v = \partial_x g_1 + \partial_y g_2$$

où $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2), g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (on notera $g = (g_1, g_2)$)
on a

$$\|v\|_G = \arg\inf_g \left\| \left(|g_1(x)|^2 + |g_2(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty}$$

Dual de BV (suite)

En pratique on ne sait pas calculer $\|.\|_G \Rightarrow$ autres espaces de travail.

Dual de BV (suite)

En pratique on ne sait pas calculer $\|.\|_G \Rightarrow$ autres espaces de travail.
Lemme :

$$B_1^{1,1} \subset BV \subset L^2(\mathbb{R}^2) \subset G \subset B_\infty^{-1,\infty}$$

Dual de BV (suite)

En pratique on ne sait pas calculer $\|.\|_G \Rightarrow$ autres espaces de travail.
Lemme :

$$\dot{B}_1^{1,1} \subset BV \subset L^2(\mathbb{R}^2) \subset G \subset \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$$

ou hypothèses sur le modèle.

Algorithme de Vese-Osher (2002)

L.Vese et .al utilisent la propriété suivante :

$$\left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^\infty} = \lim_{p \to \infty} \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^p}$$

Algorithme de Vese-Osher (2002)

L.Vese et .al utilisent la propriété suivante :

$$\left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^\infty} = \lim_{p \to \infty} \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^p}$$

minimisation par rapport à u, g_1, g_2 de

$$G_p(u, g_1, g_2) = \int |\nabla u| + \lambda \int |f - u - \partial_x g_1 - \partial_y g_2|^2 dxdy +$$

$$\mu \left[\int \left(\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right)^p dxdy \right]^{1/p}$$

avec $\lambda, \mu > 0$

Algorithme de Vese-Osher

On applique Euler-Lagrange :

$$u = u_0 - \partial_x g_1 - \partial_y g_2 + \frac{1}{2\lambda} div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right),$$

$$\mu\left(\left\|\sqrt{g_1^2+g_2^2}\right\|_p\right)^{1-p}\left(\sqrt{g_1^2+g_2^2}\right)^{p-2} g_1 = 2\lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}(u-u_0) + \partial^2_{xx} g_1 + \partial^2_{xy} g_2\right],$$

$$\mu\left(\left\|\sqrt{g_1^2+g_2^2}\right\|_p\right)^{1-p}\left(\sqrt{g_1^2+g_2^2}\right)^{p-2} g_2 = 2\lambda\left[\frac{\partial}{\partial y}(u-u_0) + \partial^2_{xy} g_1 + \partial^2_{yy} g_2\right],$$

Voir L.Vese Et .Al pour la discrétisation des equations

Algorithme de J-F Aujol (2003)

On note

$$G_\mu = \{v \in G(\Omega) / \|v\|_G \leqslant \mu\}$$

Algorithme de J-F Aujol (2003)

On note

$$G_\mu = \{v \in G(\Omega) / \|v\|_G \leqslant \mu\}$$

$$F(u,v) = \begin{cases} J(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u_0 - u - v\|^2_{L^2(\Omega)} & \text{si} \quad v \in G_\mu(\Omega) \\ +\infty & \text{si} \quad v \in G(\Omega) \backslash G_\mu(\Omega) \end{cases}$$

Algorithme de J-F Aujol (2003)

On note

$$G_\mu = \{v \in G(\Omega) / \|v\|_G \leqslant \mu\}$$

$$F(u,v) = \begin{cases} J(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u_0 - u - v\|^2_{L^2(\Omega)} & \text{si} \quad v \in G_\mu(\Omega) \\ +\infty & \text{si} \quad v \in G(\Omega) \backslash G_\mu(\Omega) \end{cases}$$

L'algorithme proposé est

$$\arg \inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)} F(u,v)$$

Utilisation de projecteurs non linéaires

$$\widehat{u} = u_0 - v - P_{\lambda K}(u_0 - v)$$
$$\widehat{v} = P_{\mu K}(u_0 - u)$$

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE LA DÉFENSE

DGA

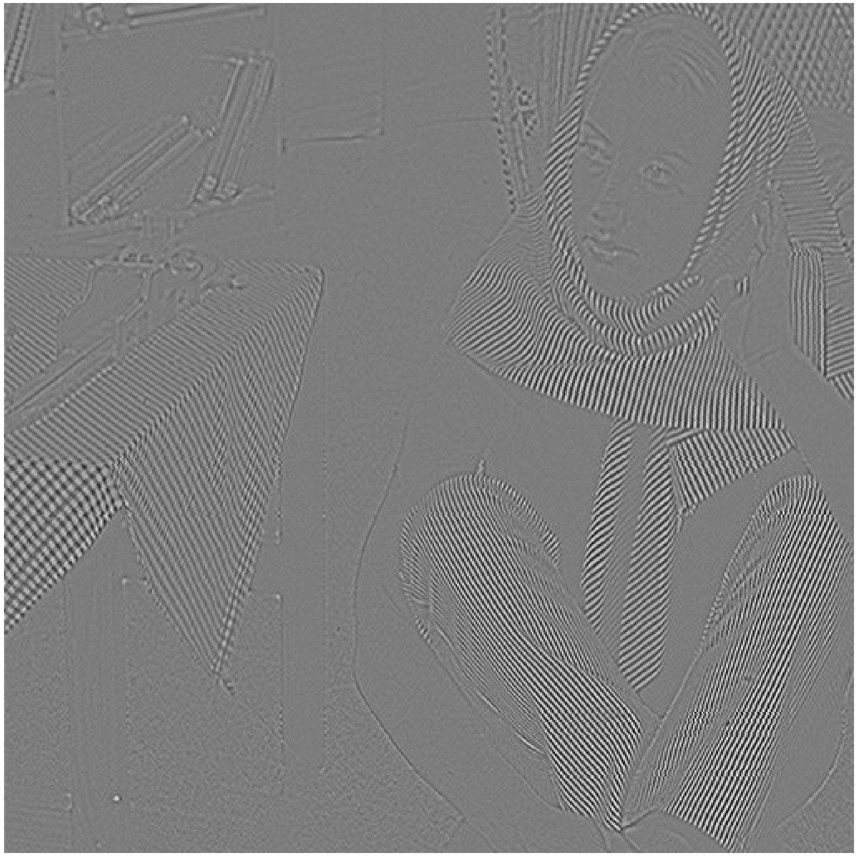
Utilisation de projecteurs non linéaires

$$\widehat{u} = u_0 - v - P_{\lambda K}(u_0 - v)$$
$$\widehat{v} = P_{\mu K}(u_0 - u)$$

Théorème : Si $\tau < \frac{1}{8}$ alors $\lambda div(p^n)$ converge vers $P_{\lambda K}(g)$ quand $n \to +\infty$
où

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau\left(\nabla\left(div(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j}}{1 + \tau\left|\left(\nabla\left(div(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j}\right|}$$

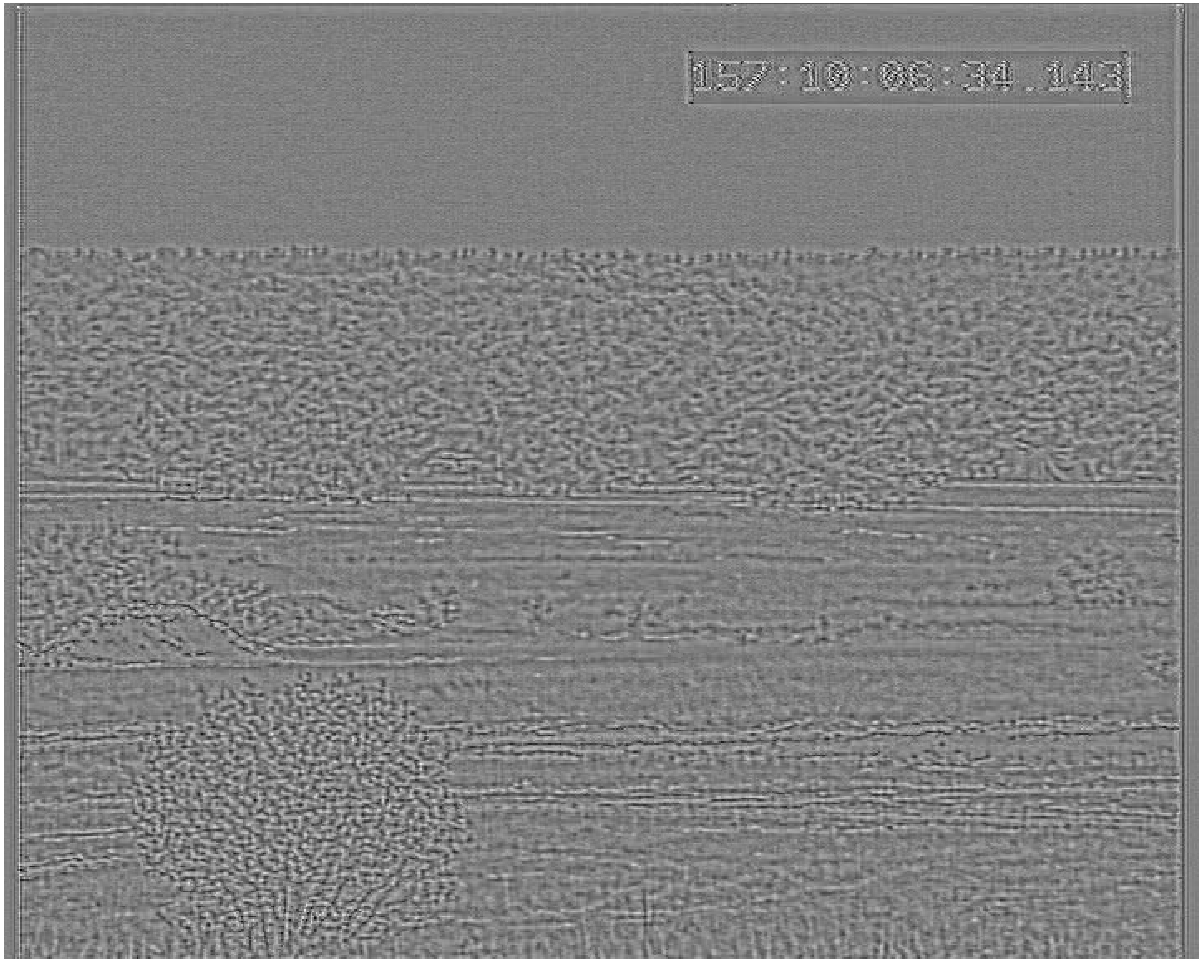
Résultat Barbara



Résultat Blindés

Résultat Blindés

Résultat Blindés



Application au monde de la Défense

- débruitage de bruit multiplicatif (imagerie active et SAR).
- extraction de réseau routier (imagerie aérienne ou satellitaire).

Débruitage de speckle

Modèle avec bruit multiplicatif :

$$f = uv$$

Débruitage de speckle

Modèle avec bruit multiplicatif :

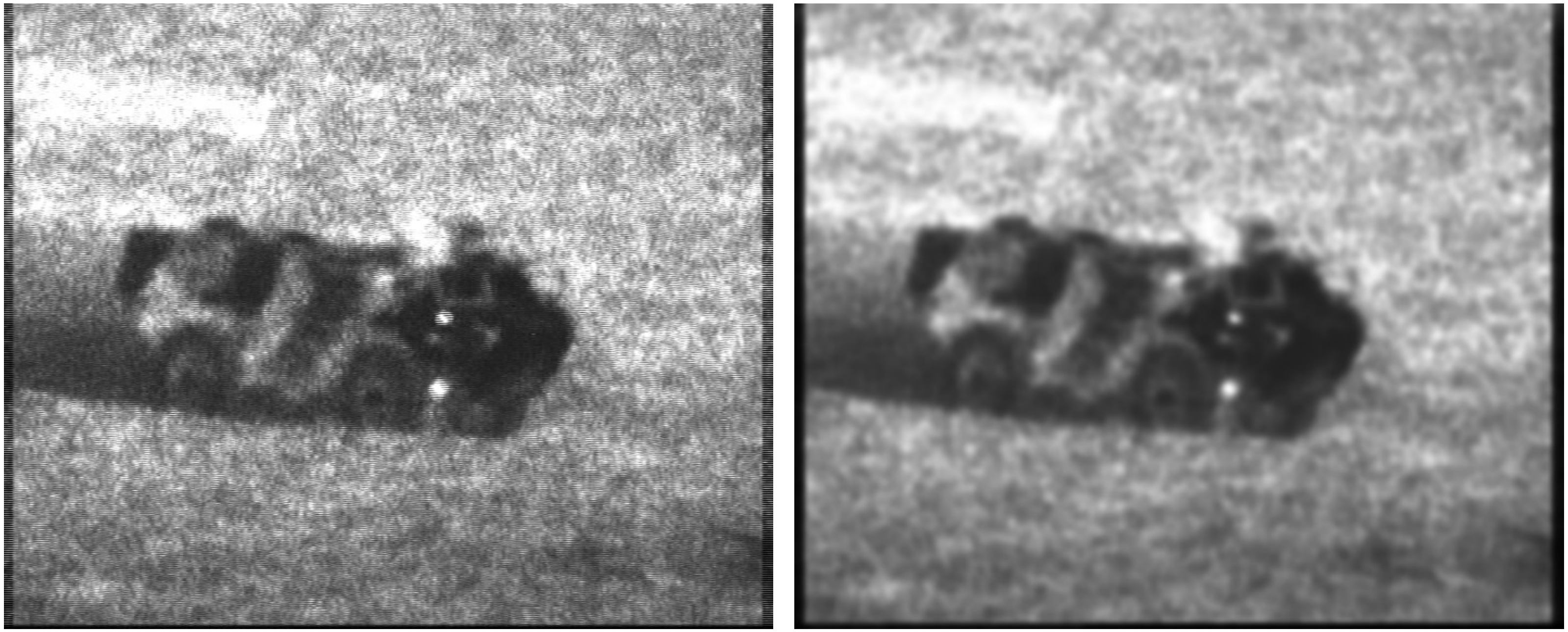
$$f = uv$$

$$\tilde{f} = \log(f) = \tilde{u} + \tilde{v}$$

où

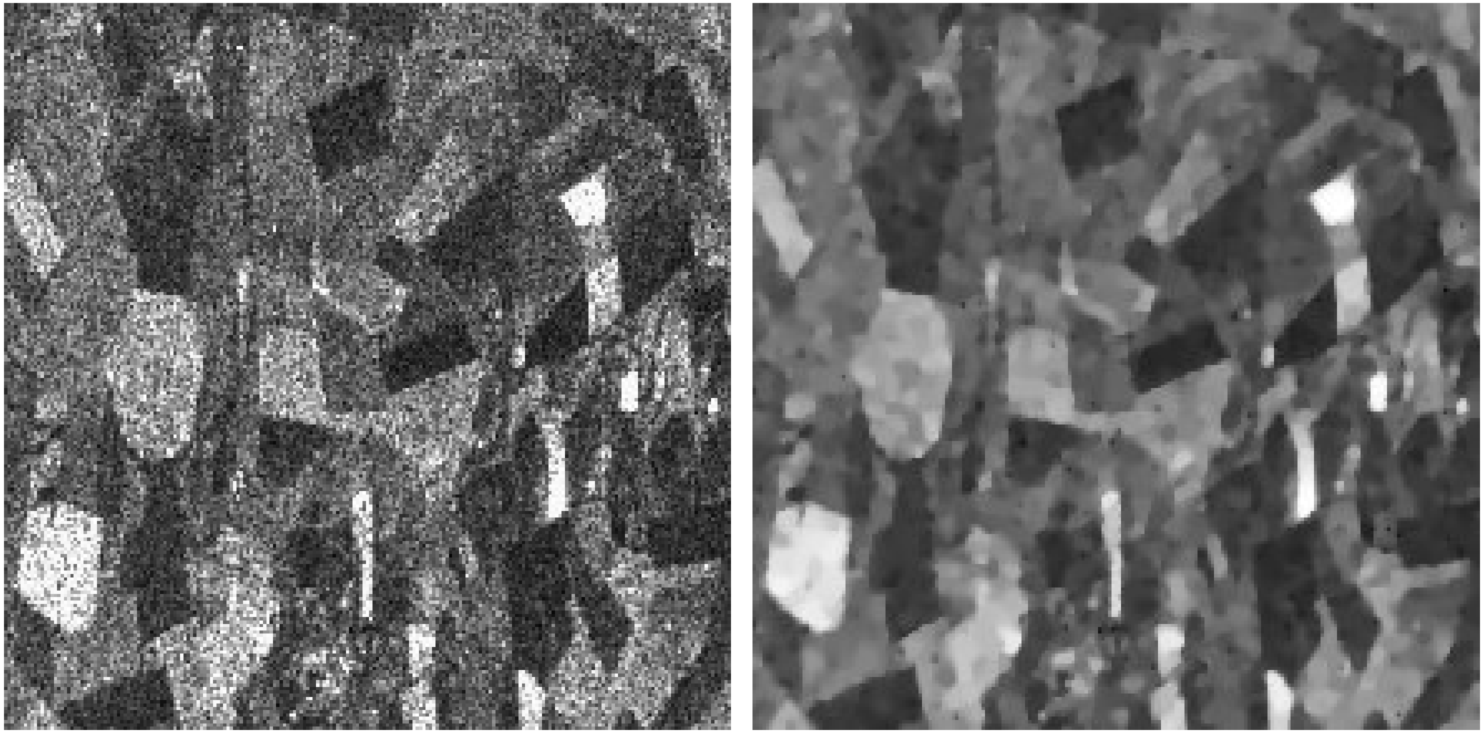
$\tilde{u} = \log(u)$ et $\tilde{v} = \log(v)$

Application à l'imagerie active



Gauche : image originale ; droite : image débruitée

Application à l'imagerie SAR

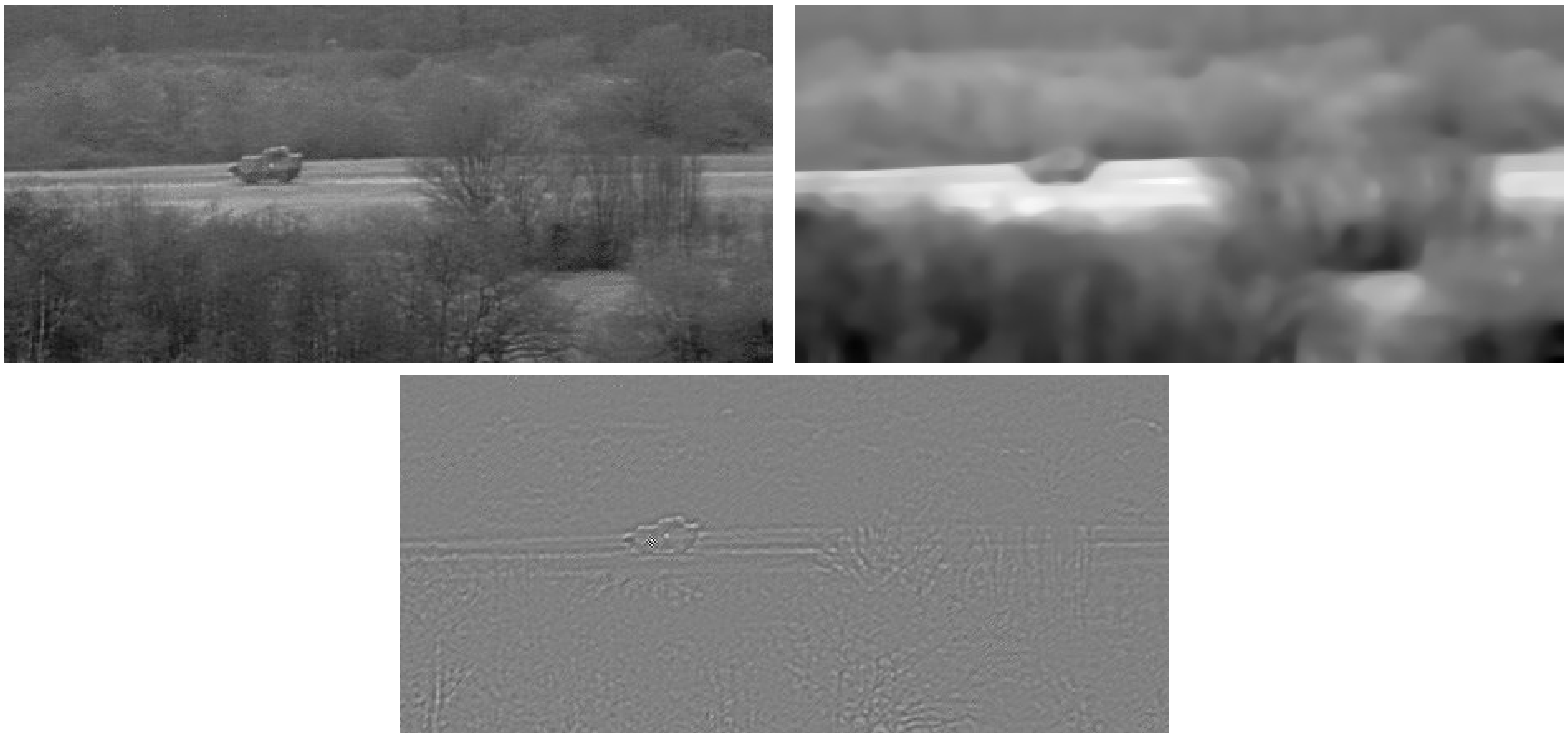


Gauche : image originale ; droite : image débruitée

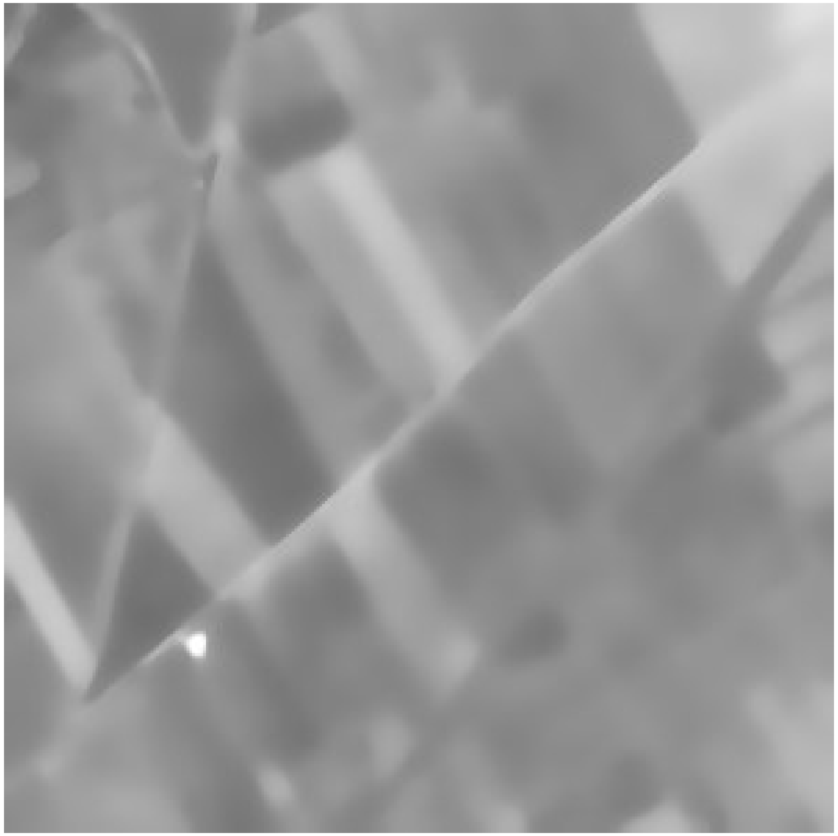
Extraction de réseau routier

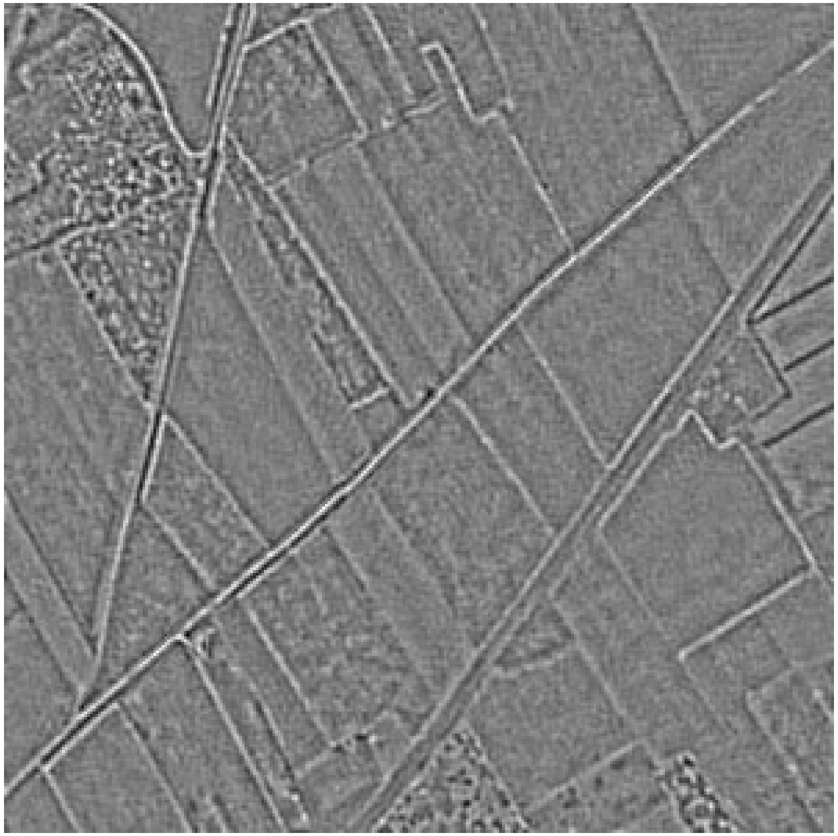
Images aériennes ou satellite.

Constatation

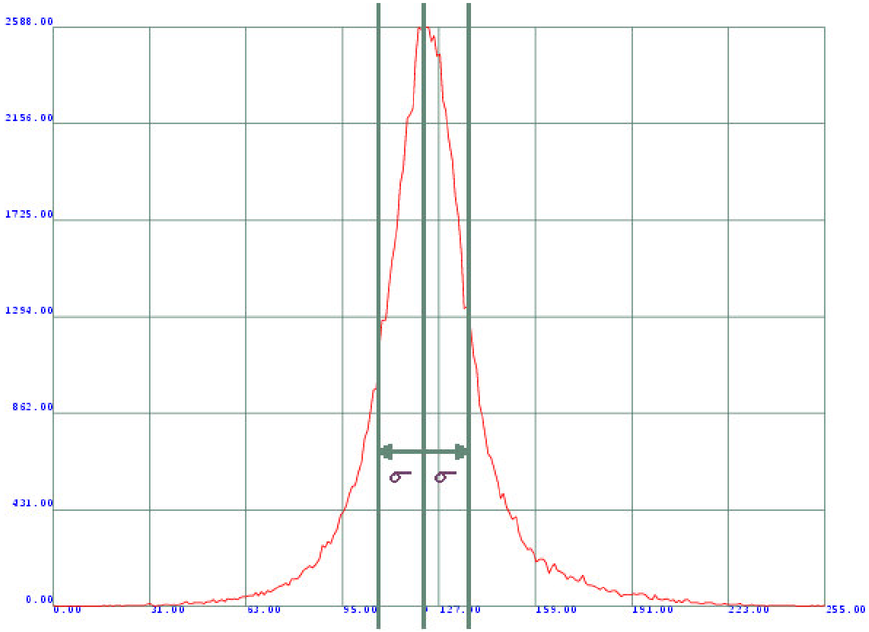


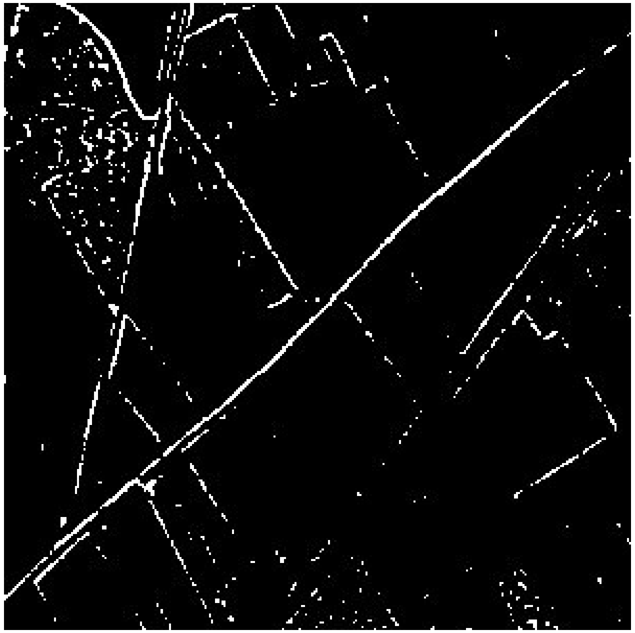
Décomposition de l'image



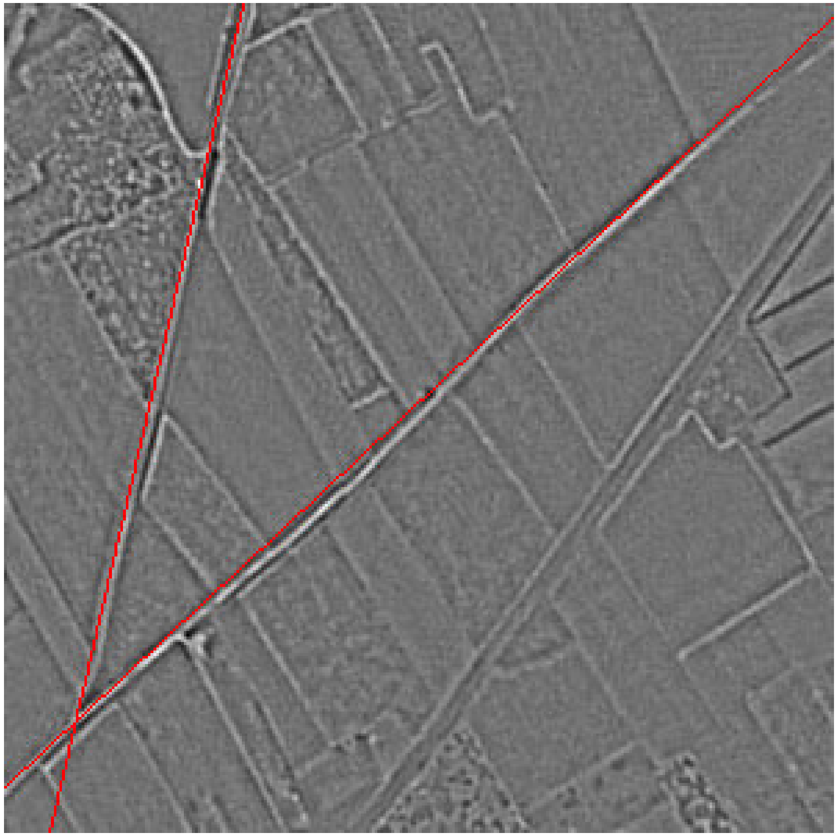


Extraction du réseau routier





Extraction du réseau routier

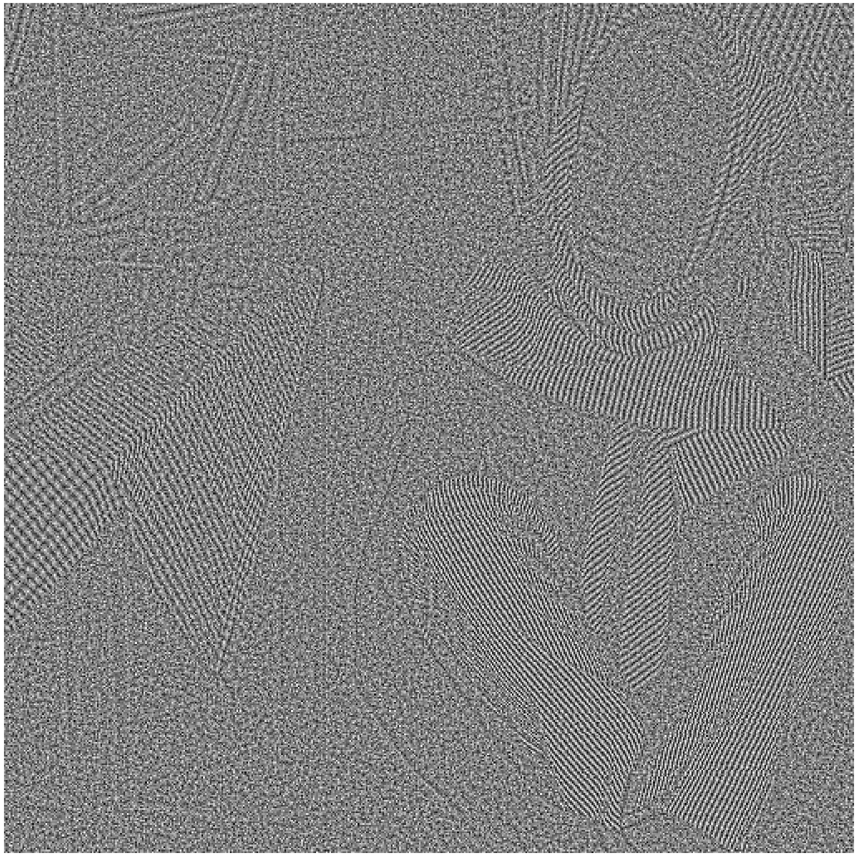


Décomposition $u + v + w$

Si présence de bruit $\Rightarrow$ partie v

Décomposition $u + v + w$

Si présence de bruit $\Rightarrow$ partie v



Principes

Idées :

- avoir un cœfficient de régularisation adaptatif (Gilboa et al.),
- la texture et le bruit ont des normes différentes ($\|bruit\|_G \leqslant \|texture\|_G$).

Premier modèle

Modèle proposé : $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in (BV \times G_{\mu_1} \times G_{\mu_2})$

$$\inf \left\{ J(u) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - \nu_1 v - \nu_2 w\|_{L^2}^2 + J^* \left(\frac{v}{\mu_1} \right) + J^* \left(\frac{w}{\mu_2} \right) \right\}$$

où ν_1 et ν_2 sont les fonctions de pondération adaptatives (en pratique on prend $\nu_1 = 1 - \nu_2$).

Proposition

la solution est donnée par

$$\hat{u} = f - \nu_1 v - \nu_2 w - P_{\lambda K}(f - \nu_1 v - \nu_2 w)$$

$$\hat{v} = P_{\mu_1 K}\left(\frac{f - u - \nu_2 w}{\nu_1}\right)$$

$$\hat{w} = P_{\mu_2 K}\left(\frac{f - u - \nu_1 v}{\nu_2}\right)$$

Résultats

Résultats

Modèle de Aujol-Chambolle

Le modèle proposé est de trouver $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in (BV \times G_\mu \times B_{\delta E})$ tels que l'on ait

$$\inf \left\{ J(u) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v - w\|_{L^2}^2 + J^* \left(\frac{v}{\mu}\right) + B^* \left(\frac{w}{\delta}\right) \right\}$$

où $B_{\delta E} = \{w \in B^\infty_{-1,\infty} \mid \|w\|_{B^\infty_{-1,\infty}} \leqslant \delta\}$

Solution

La solution du modèle de Aujol et Chambolle est donné par

$$\hat{u} = f - v - w - P_{\lambda K}(f - v - w)$$
$$\hat{v} = P_{\mu K}(f - u - w)$$
$$\hat{w} = P_{\delta E}(f - u - v)$$

Solution

La solution du modèle de Aujol et Chambolle est donné par

$$\hat{u} = f - v - w - P_{\lambda K}(f - v - w)$$

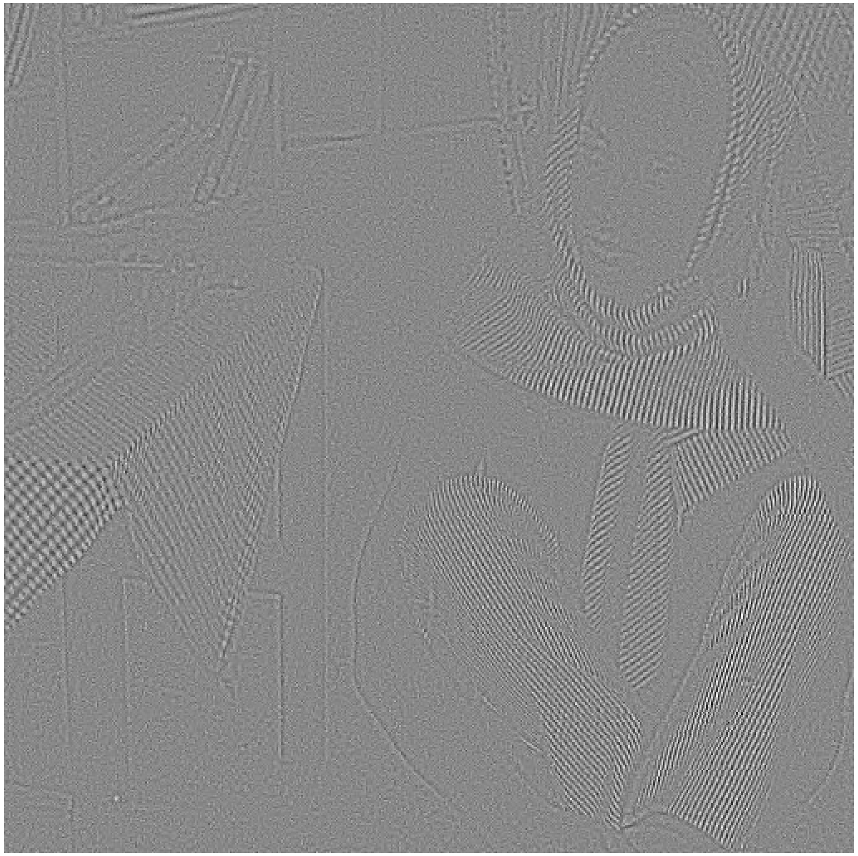
$$\hat{v} = P_{\mu K}(f - u - w)$$

$$\hat{w} = P_{\delta E}(f - u - v)$$

où $P_{\delta E}(f) = f - WST(f, 2\delta)$

Résultats

Résultats



Comparaison

Proposition :

Les deux modèles sont équivalents lorsque l'on choisit $\nu_1 = \nu_2 = 1$ dans notre modèle.

$(G \subset B^{\infty}_{-1,\infty})$

Généralisation

Idée : utiliser $B_{\delta E}$ pour modéliser le bruit et garder la notion de cœfficient adaptatif local.

Généralisation

Idée : utiliser $B_{\delta E}$ pour modéliser le bruit et garder la notion de cœfficient adaptatif local.

modèle proposé : trouver $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in (BV \times G_\mu \times B_{\delta E})$

$$\inf \left\{ J(u) + (2\lambda)^{-1} \| f - u - \nu_1 v - \nu_2 w \|_{L^2}^2 + J^* \left(\frac{v}{\mu} \right) + B^* \left(\frac{w}{\delta} \right) \right\}$$

Solution

La solution du modèle "généralisé" est donnée par

$$\hat{u} = f - \nu_1 v - \nu_2 w - P_{\lambda K}(f - \nu_1 v - \nu_2 w)$$

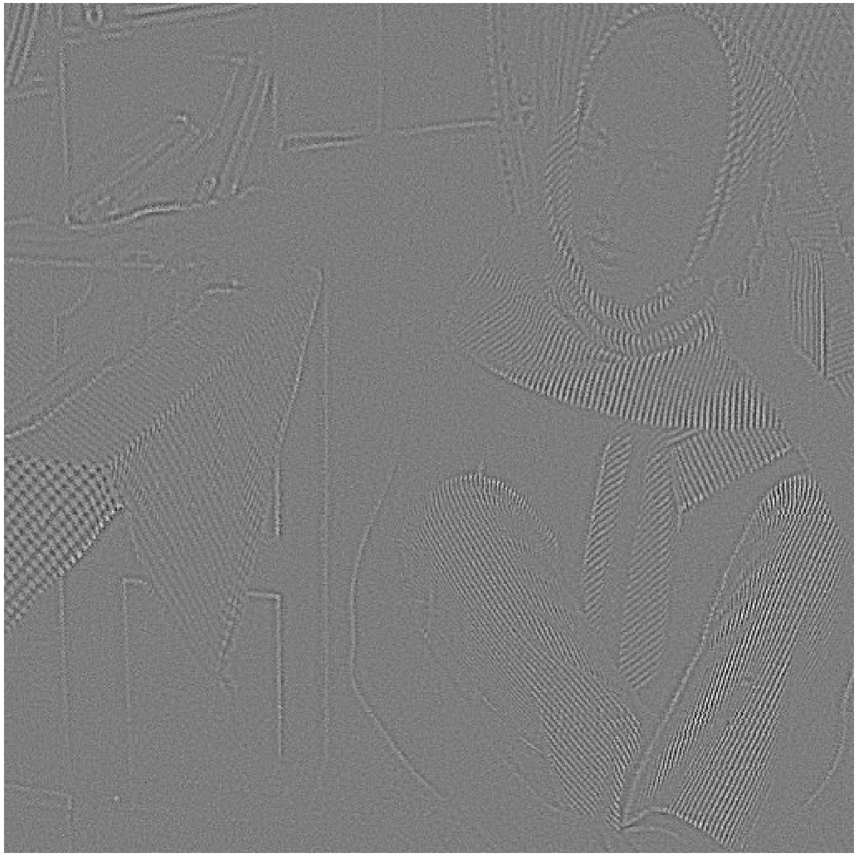
$$\hat{v} = P_{\mu K}\left(\frac{f - u - \nu_2 w}{\nu_1}\right)$$

$$\hat{w} = \frac{f - u - \nu_1 v}{\nu_2} - \frac{\lambda}{\delta \nu_2^2} WST\left(\frac{\delta \nu_2}{\lambda}(f - u - \nu_1 v); \frac{2\delta^2 \nu_2^2}{\lambda}\right)$$

Résultats

Résultats



Conclusion - Perspective

Conclusions

- réflexion sur le choix des fonctions ν_i,

Conclusion - Perspective

Conclusions

- réflexion sur le choix des fonctions ν_i,
- approfondir l'idée de l'extraction de réseau routier (détection des alignements ?),

Conclusion - Perspective

Conclusions

- réflexion sur le choix des fonctions ν_i,
- approfondir l'idée de l'extraction de réseau routier (détection des alignements ?),
- segmentation de texture (la simple norme ne suffit pas),

Conclusion - Perspective

Conclusions

- réflexion sur le choix des fonctions ν_i,
- approfondir l'idée de l'extraction de réseau routier (détection des alignements ?),
- segmentation de texture (la simple norme ne suffit pas),

Perspectives

- ridgelets ($R^{\infty}_{-1,\infty}$), ...