

# Séparation en composantes structures, textures et bruit d'une image, apport de l'utilisation des contourlettes.

Jérôme GILLES<sup>1</sup>

<sup>1</sup>DGA-CEP/EORD, 16bis rue Prieur de la Côte d'Or 94110 Arcueil  
jerome.gilles@etca.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons une amélioration des méthodes de décomposition d'image dans le cas d'images bruitées. Dans [1, 9], les auteurs proposent de séparer les structures, textures et bruit d'une image. Malheureusement, l'utilisation d'ondelettes séparables provoque des artefacts. Nous proposons ici de remplacer les ondelettes par l'utilisation des contourlettes qui permettent de mieux approximer la géométrie dans les images. Pour cela, nous définissons les espaces de contourlettes et leurs normes associées. Nous obtenons un algorithme itératif que nous appliquons sur deux images texturées et bruitées.

**Abstract** – In this paper, we propose to improve image decomposition algorithms in the case of noisy images. In [1, 9], the authors propose to separate structures, textures and noise from an image. Unfortunately, the use of separable wavelets shows some artefacts. In this paper, we propose to replace the wavelet transform by the contourlet transform which better approximate geometry in images. For that, we define contourlet spaces and their associated norms. Then, we get an iterative algorithm which we test on two noisy textured images.

## 1 Introduction

Ces dernières années, des modèles permettant de décomposer une image  $f$  en ses composantes structures  $u$  + textures  $v$  ont vu le jour. Le principe, proposé par Y.Meyer dans [4], consiste à considérer les structures comme des fonctions de l'espace des fonctions à variations bornées  $BV$  et les textures comme des fonctions oscillantes appartenant à un espace noté  $G$  proche du dual de  $BV$ . Le modèle consiste alors à minimiser la fonctionnelle

$$F^{YM}(u, v) = \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_G. \quad (1)$$

Un algorithme numérique efficace itératif basé sur un projecteur non linéaire  $P_{G_\lambda}$  a été proposé par J.F Aujol dans [3] moyennant une modification de la fonctionnelle (mais donnant les mêmes minimiseurs que pour (1)):

$$F_{\lambda, \mu}^{AU}(u, v) = J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v\|_{L^2}^2 \quad (2)$$

où  $J^*(v)$  est la fonction caractéristique sur  $G_1$  où  $G_\mu = \{v \in G / \|v\|_G \leq \mu\}$  et  $J(u) = \|u\|_{BV}$ .

Ce modèle montre ses limites dès que les images d'entrée sont bruitées. En effet, le bruit peut être considéré comme un signal très oscillant et sera donc capturé dans la composante  $v$ . Il est alors nécessaire d'étendre ce modèle à un modèle à trois composantes: structures  $u$  + textures  $v$  + bruit  $w$ . Dans [1], nous avons proposé une première approche permettant de réaliser cette décomposition en jouant d'une part sur les bornes supérieures de la norme dans l'espace  $G$  pour les composantes  $v$  et  $w$  et d'autre

part en donnant un comportement localement adaptatif à l'algorithme. Nous avons comparé ce modèle à celui proposé par Aujol et al. [2] utilisant un seuillage des coefficients d'une décomposition en ondelettes pour effectuer le débruitage. Les deux méthodes donnent de bon résultats, le seuillage des ondelettes montrant une meilleure performance de débruitage mais abîmant les bords des structures. Ce phénomène est dû au fait que la transformée en ondelette 2D se base sur deux directions. Aussi dans cette communication, nous proposons de remplacer l'utilisation des ondelettes par celle des contourlettes [5]. En effet, cette représentation permet de mieux tenir compte de la géométrie des bords présents dans les images. Nous définissons la notion d'espace des contourlettes et montrons que le seuillage des coefficients revient à faire la projection sur cet espace.

## 2 Séparation structures, textures et bruit

Commençons par rappeler les modèles proposés dans [1] et [2] permettant d'effectuer cette décomposition en trois composantes. Le premier considère que les textures et le bruit sont des fonctions oscillantes à ceci près que le bruit est vu comme beaucoup plus oscillant. Suivant les propriétés de la norme sur l'espace  $G$  (cette norme est d'autant plus faible que le signal est oscillant), nous considérons que  $v \in G_{\mu_1}$  et  $w \in G_{\mu_2}$  avec  $\mu_2 \ll \mu_1$ . De plus, nous proposons d'utiliser une "carte"  $\nu$  des zones où sont

présentes des textures afin d'accentuer ou non le pouvoir de débruitage (voir [1] pour plus de détails). La fonctionnelle à minimiser est:

$$F_{\lambda,\mu_1,\mu_2}^{JG}(u, v, w) = J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu_1}\right) + J^*\left(\frac{w}{\mu_2}\right) + (2\lambda)^{-1}\|f - u - \nu_1 v - \nu_2 w\|_{L^2}^2. \quad (3)$$

Moyennant une légère modification, nous pouvons utiliser les projecteurs non linéaires utilisés dans le cas à deux composantes. Tous les détails théoriques et numériques sont disponibles dans [1].

Dans [2], les auteurs proposent un modèle assez similaire mais considérant le bruit comme appartenant à l'espace des distributions. Cette espace étant formulé via l'espace de Besov  $E = \dot{B}_{-1,\infty}^\infty$ . La fonctionnelle proposée est alors:

$$F_{\lambda,\mu,\delta}^{AC}(u, v, w) = J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) + B^*\left(\frac{w}{\delta}\right) + (2\lambda)^{-1}\|f - u - v - w\|_{L^2}^2, \quad (4)$$

où  $B^*(w)$  est la fonction caractéristique sur l'espace  $E_1 = \{w \in E / \|w\|_E \leq 1\}$ . Les auteurs montrent que la projection sur cet espace correspond à effectuer un seuillage doux des coefficients d'une décomposition en ondelettes. Ce modèle donne un meilleur débruitage mais abîme les bords des structures, dû au fait que la transformée 2D n'utilise que des filtres séparables horizontaux et verticaux. Nous proposons donc de remplacer l'utilisation de ces ondelettes par une représentation mieux adaptée au traitement des images et plus particulièrement à la géométrie présente. La représentation retenue est celle des contourlettes [5].

### 3 Séparation de composantes basée sur les contourlettes

Nous commençons par rappeler un résultat démontré par Do et Vetterli [5]:

**Théorème 1** *Soit  $j$  l'échelle,  $n$  la position,  $\{l_j\}_{j \leq j_0}$  l'ensemble des nombres de directions souhaitées pour chaque échelle  $j$ . Alors, la famille*

$$\left\{ \phi_{j_0,n}^{(l_j)}(t); \rho_{j,k,n}^{(l_j)}(t) \right\}_{j \leq j_0, 0 \leq k \leq 2^{l_j} - 1, n \in \mathbb{Z}^2} \quad (5)$$

est une trame ajustée de  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .

Tous les détails sur la construction des fonctions  $\phi_{j_0,n}(t)$  et  $\rho_{j,k,n}^{(l_j)}(t)$  sont disponibles dans [5, 6, 7]. Ceci implique donc que l'on peut décomposer une fonction de  $L_2(\mathbb{R}^2)$  de la manière suivante:

**Corollaire 1**

$$f(t) = \sum_n \alpha_n \phi_{j_0,n}(t) + \sum_{j \leq j_0} \sum_{k=0}^{2^{l_j}-1} \sum_n \beta_{j,k,n} \rho_{j,k,n}^{(l_j)}(t) \quad (6)$$

ou

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{2^{l_j}-1} \sum_n \beta_{j,k,n} \rho_{j,k,n}^{(l_j)}(t). \quad (7)$$

Où  $\alpha_n = \langle f | \phi_{j_0,n} \rangle$  et  $\beta_{j,k,n} = \langle f | \rho_{j,k,n}^{(l_j)} \rangle$  sont les coefficients de la transformée en contourlettes. Nous pouvons alors définir, sur le modèle des espaces de Besov, les espaces de contourlettes  $Co_{p,q}^s$  et leurs versions homogènes  $\dot{Co}_{p,q}^s$  ainsi que leurs normes associées:

**Définition 1** *Soit  $s \geq 0$  et  $p, q > 0$ , si  $f \in Co_{p,q}^s$  alors*

$$\|f\|_{Co_{p,q}^s} = \left[ \sum_n |\alpha_{j_0,n}|^p \right]^{1/p} + \left\{ \sum_{j \leq j_0} 2^{j(\frac{d}{2} - \frac{1}{p} + s)q} \left[ \sum_{k=0}^{2^{l_j}-1} \sum_n 2^{j\frac{p}{2}} |\beta_{j,k,n}|^p \right]^{q/p} \right\}^{1/q} \quad (8)$$

ou dans le cas des espaces homogènes

$$\|f\|_{\dot{Co}_{p,q}^s} = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(\frac{d}{2} - \frac{1}{p} + s)q} \left[ \sum_{k=0}^{2^{l_j}-1} \sum_n 2^{j\frac{p}{2}} |\beta_{j,k,n}|^p \right]^{q/p} \right\}^{1/q} \quad (9)$$

Il est rapide de voir que l'espace  $\dot{Co}_{-1,\infty}^\infty$ , comme dans le cas des espaces de Besov, contient les distributions et peut donc être utilisé pour modéliser le bruit dans l'image. La fonctionnelle prenant en compte cet espace permettant la décomposition est alors:

$$F_{\lambda,\mu,\delta}^{Co}(u, v, w) = J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) + J_{Co}^*\left(\frac{w}{\delta}\right) + (2\lambda)^{-1}\|f - u - v - w\|_{L^2}^2 \quad (10)$$

Avec  $J_{Co}^*$  la fonction caractéristique sur  $Co_1$  où  $Co_\delta = \{f \in \dot{Co}_{-1,\infty}^\infty / \|f\|_{\dot{Co}_{-1,\infty}^\infty} \leq \delta\}$ . Les minimiseurs de (10) sont donnés par la proposition suivante.

**Proposition 1** *Soit  $u \in BV$ ,  $v \in G_\mu$ ,  $w \in Co_\delta$  respectivement les composantes structures, textures et bruit découlant de la décomposition d'image. Alors, les minimiseurs*

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \arg_{(u,v,w) \in BV \times G_\mu \times Co_\delta} \inf F_{\lambda,\mu,\delta}^{Co}(u, v, w) \quad (11)$$

sont donnés par

$$\begin{aligned} \hat{u} &= f - \hat{v} - \hat{w} - P_{G_\lambda}(f - \hat{v} - \hat{w}) \\ \hat{v} &= P_{G_\mu}(f - \hat{u} - \hat{w}) \\ \hat{w} &= f - \hat{u} - \hat{v} - CST(f - \hat{u} - \hat{v}; 2\delta) \end{aligned}$$

où  $P_{G_\lambda}$  est le projecteur non-linéaire de Chambolle et  $CST(f - \hat{u} - \hat{v}, 2\delta)$  est l'opérateur de seuillage doux, avec un

seuil de  $2\delta$ , des coefficients de la transformée en contourlettes de  $f - u - v$ .

**Preuve 1** Les composantes  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  sont obtenues par le même argument utilisé dans les démonstrations des travaux de Aujol et Chambolle [9] ou dans les travaux de Gilles [1]) et ne seront pas redémontrés ici. Le point particulier concerne l'expression de  $\hat{w}$  en fonction du seuillage doux des coefficients de la transformée en contourlettes. Supposons que l'on cherche à minimiser  $F_{\lambda,\mu,\delta}^{C_o}(u, v, w)$  par rapport à  $w$ , ceci est équivalent à chercher  $w$  solution de (on pose  $g = f - u - v$ )

$$\hat{w} = \arg \min_{w \in C_{o\delta}} \{ \|g - w\|_{L^2}^2 \}. \quad (12)$$

Nous pouvons alors utiliser une formulation duale:  $\hat{w} = g - \hat{h}$  telle que

$$\hat{h} = \arg \min_{h \in \hat{C}_{o1,1}} \left\{ 2\delta \|h\|_{\hat{C}_{o1,1}} + \|g - h\|_{L^2}^2 \right\}. \quad (13)$$

Nous pouvons utiliser la même approche que Chambolle et al. dans [8].

Soit  $(c_{j,k,n})_{j \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 2^{(l_j)}, n \in \mathbb{Z}^2}$  et  $(d_{j,k,n})_{j \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 2^{(l_j)}, n \in \mathbb{Z}^2}$  les coefficients respectivement issus de la transformée en contourlettes de  $g$  et  $h$ . Comme les contourlettes forment une trame ajustée, de borne 1, nous avons (on note  $\Omega = \mathbb{Z} \times \llbracket 0, 2^{(l_j)} \rrbracket \times \mathbb{Z}^2$ )

$$\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{(j,k,n) \in \Omega} |c_{j,k,n}|^2. \quad (14)$$

Alors (13) consiste à trouver les  $d_{j,k,n}$  minimisant

$$\sum_{(j,k,n) \in \Omega} |c_{j,k,n} - d_{j,k,n}|^2 + 2\delta \sum_{(j,k,n) \in \Omega} |d_{j,k,n}| \quad (15)$$

ce qui est équivalent à minimiser

$$|c_{j,k,n} - d_{j,k,n}|^2 + 2\delta |d_{j,k,n}|. \quad (16)$$

Or, dans [8], les auteurs montrent que la solution à ce type de problème est un seuillage doux des coefficients  $(c_{j,k,n})$  avec un seuil de  $2\delta$ .

Alors  $\hat{h} = CST(g, 2\delta)$ , ce qui, par dualité, implique que  $\hat{w} = g - CST(g, 2\delta)$ . Nous concluons donc que

$$\hat{w} = f - \hat{u} - \hat{v} - CST(f - \hat{u} - \hat{v}, 2\delta) \quad (17)$$

ce qui termine la preuve.

L'algorithme numérique correspondant consiste donc en celui de Aujol et al. dans lequel nous remplaçons l'utilisation des ondelettes par celle des contourlettes.

1. initialisation:  $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ ,
2. calcul de  $w_{n+1} = f - u_n - v_n - CST(f - u_n - v_n, 2\delta)$ ,
3. calcul de  $v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n - w_{n+1})$ ,
4. calcul de  $u_{n+1} = f - v_{n+1} - w_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1} - w_{n+1})$ ,
5. si  $\max\{|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|, |w_{n+1} - w_n|\} \leq \epsilon$  ou si  $N_{step}$  itérations ont été faites alors on stoppe l'algorithme, sinon on retourne à l'étape 2.

## 4 Résultats

La figure 1 montre les images de test utilisées. Nous leur avons ajouté un bruit de type gaussien additif d'une variance  $\sigma = 20$  sur chaque image.

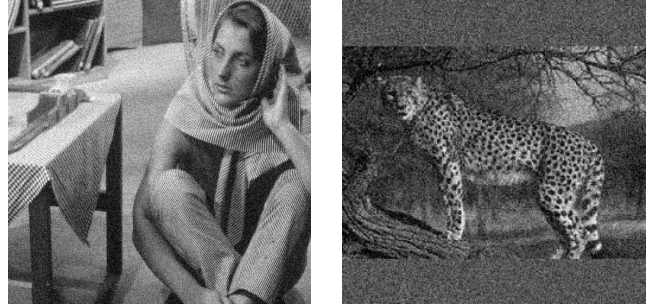


FIG. 1 – Images de test Barbara et Léopard corrompues par un bruit gaussien ( $\sigma = 20$ ).

Les résultats de la décomposition obtenue sur chaque image sont donnés respectivement sur les figures 2 et 3. Le bruit est effectivement bien séparé du reste des autres composantes. Nous pouvons toutefois remarquer, comme pour les autres algorithmes cités précédemment, que le choix des paramètres influe sur la quantité de résidu de bruit dans les textures et la quantité de résidu de textures dans le bruit. Par ailleurs, comme attendu, les structures sont de meilleure qualité du fait de l'utilisation des contourlettes.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une extension du modèle de décomposition d'image basé sur le seuillage de coefficients d'ondelette proposé par Aujol et al. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser les contourlettes. Celles-ci permettent en effet de tenir compte de la géométrie dans les images et ont un meilleur pouvoir d'approximation que les ondelettes. Nous définissons alors les espaces de contourlettes ainsi que leurs normes associées; et montrons que la projection sur ces espaces correspond, comme dans

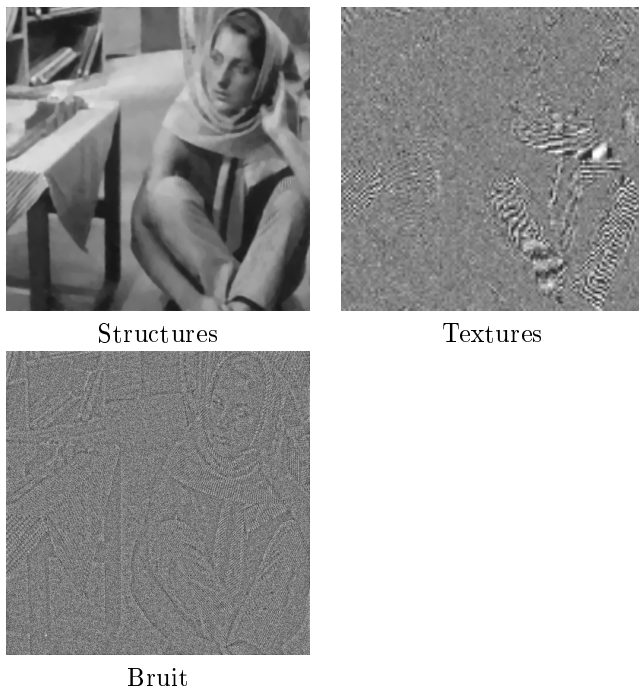


FIG. 2 – Composantes structures + textures + bruit issus de la décomposition de Barbara bruitée.

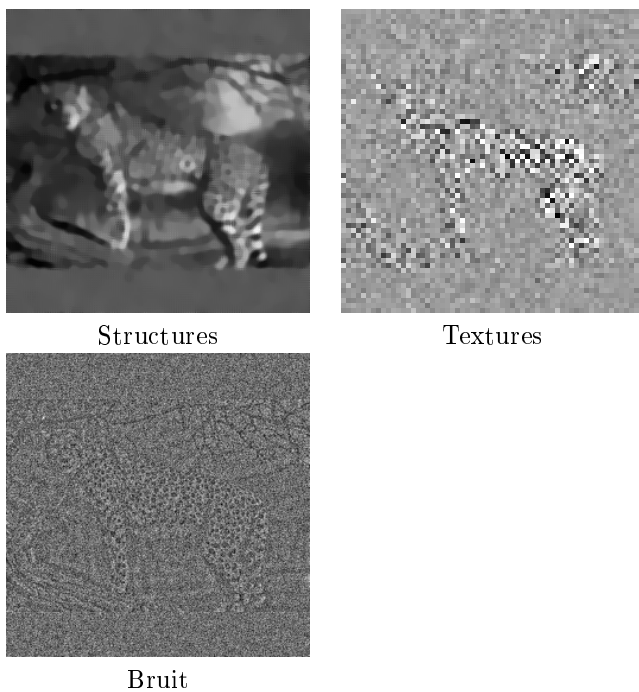


FIG. 3 – Composantes structures + textures + bruit issus de la décomposition du Léopard bruitée.

le cas des ondelettes, à un seuillage doux des coefficients de la transformée.

L’algorithme final permettant d’obtenir la décomposition en trois composantes revient au même algorithme que dans le cas des ondelettes à la différence près que

le seuillage des coefficients d’ondelette est remplacé par le seuillage des coefficients de contourlettes.

Les résultats obtenus montrent effectivement un gain, d’une part sur la qualité des structures extraites, d’autre part sur le pouvoir de débruitage (et donc le pouvoir de séparabilité du bruit et des textures).

Il serait intéressant, dans le futur, d’utiliser de nouvelles représentations “creuses” qui permettrait certainement de gagner encore sur la qualité des composantes extraites.

## Références

- [1] J.Gilles, “Noisy image decomposition: a new structure, texture and noise model based on local adaptivity”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision (JMIV)*, Vol.28, No.3, 285-295, 2007.
- [2] J.F.Aujol, A.Chambolle, “Dual norms and image decomposition models”, *International Journal of Computer Vision*, Vol.63, No.1, 85-104, 2005.
- [3] J.F.Aujol, G.Aubert, L.Blanc-Féraud, A.Chambolle, “Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision (JMIV)*, Vol.22, No.1, 71-88, 2005.
- [4] Y.Meyer, “Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations”, *The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures*, American Mathematical Society, 2001.
- [5] M.N.Do, M.Vetterli, “The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation”, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol.14, No.12, 2091-2106, 2003.
- [6] M.N.Do, “Contourlets and sparse image representations”, *SPIE conference on Wavelet Applications in Signal and Image Processing*, San Diego, USA, 2003.
- [7] M.N.Do, M.Vetterli, “Contourlets: A Directional Multiresolution Image Representation”, *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, Rochester, 2002.
- [8] A.Chambolle, R.A.DeVore, N.Lee, B.J.Lucier, “Non-linear wavelet image processing: variational problems, compression and noise removal through wavelet shrinkage”, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol.7, 319-335, 1998
- [9] J.F.Aujol, A.Chambolle, “Dual norms and image decomposition models”, *International Journal of Computer Vision*, Vol.63, No.1, 85-104, 2005