

Modélisation des images par espaces de fonctions

Ecole Analyse Multirésolution des images

Jérôme Gilles, Jean-François Aujol

DGA/CEP/EORD, CMLA/ENS Cachan

jerome.gilles@etca.fr,

Jean-Francois.Aujol@cmla.ens-cachan.fr

Plan de l'exposé

- Introduction,
- Décomposition d'image $u + v$,
- Extension au cas bruité,
- Choix du paramètre de régularisation λ ,
- et la couleur?,
- Application: détection de réseaux routiers,
- Conclusions - Perspectives.

Problématique

Détection de cibles camouflées

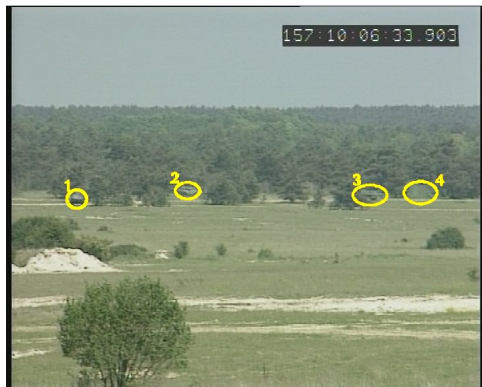
Problématique

Détection de cibles camouflées

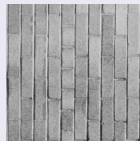
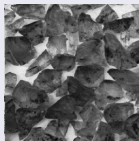
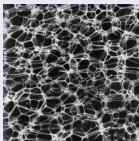
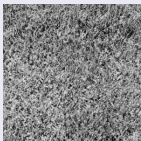


Problématique

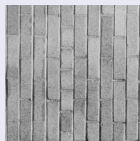
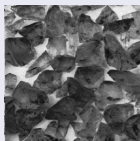
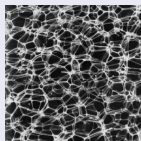
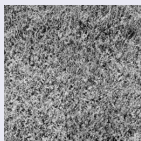
Détection de cibles camouflées



Exemple de textures



Exemple de textures



Caractéristiques des textures

- notion d'échelle,
- répétition de motifs.

- Introduction,
- Décomposition d'image $u + v$,
- Extension au cas bruité,
- Choix du paramètre de régularisation λ ,
- et la couleur?,
- Application: détection de réseaux routiers,
- Conclusions - Perspectives.

Décomposition d'image

Décomposition “bas niveau”

Principe: décomposer f en une somme de f_i “élémentaires”.

- Fourier: décomposition à l'aide de sinus et cosinus,
- Ondelettes: utilisation de fonctions “localisées”,
- Autres bases ou *frames*.

Décomposition d'image

Décomposition “bas niveau”

Principe: décomposer f en une somme de f_i “élémentaires”.

- Fourier: décomposition à l'aide de sinus et cosinus,
- Ondelettes: utilisation de fonctions “localisées”,
- Autres bases ou *frames*.

Décomposition d'image

Décomposition “bas niveau”

Principe: décomposer f en une somme de f_i “élémentaires”.

- Fourier: décomposition à l'aide de sinus et cosinus,
- Ondelettes: utilisation de fonctions “localisées”,
- Autres bases ou *frames*.

Décomposition d'image

Décomposition "bas niveau"

Principe: décomposer f en une somme de f_i "élémentaires".

- Fourier: décomposition à l'aide de sinus et cosinus,
- Ondelettes: utilisation de fonctions "localisées",
- Autres bases ou *frames*.

Décomposition d'image

Décomposition “bas niveau”

Principe: décomposer f en une somme de f_i “élémentaires”.

- Fourier: décomposition à l'aide de sinus et cosinus,
- Ondelettes: utilisation de fonctions “localisées”,
- Autres bases ou *frames*.

Décomposition “haut niveau”



L'algorithme de Rudin-Osher-Fatemi (ROF)

Restauration des objets

- But: retrouver l'image d'intérêt (u) dans une image bruitée (f),
- Choix de l'espace: BV (*Bounded Variation*)

L'algorithme de Rudin-Osher-Fatemi (ROF)

Restauration des objets

- But: retrouver l'image d'intérêt (u) dans une image bruitée (f),
- Choix de l'espace: BV (*Bounded Variation*)

L'algorithme de Rudin-Osher-Fatemi (ROF)

Restauration des objets

- But: retrouver l'image d'intérêt (u) dans une image bruitée (f),
- Choix de l'espace: BV (*Bounded Variation*)

Fonctionnelle ROF

$$F_{\lambda}^{ROF}(u) = J(u) + \lambda \|f - u\|_{L^2}^2$$

où $f \in L^2(\mathbb{R})$, $u \in BV$ et $J(u) = \int |Du|$.

Reformulation

Contrainte: $f = u + v$

$$\implies F_{\lambda}^{ROF}(u) = J(u) + \lambda \|v\|_{L^2}^2$$

Point de vue de la décomposition

Reformulation

Contrainte: $f = u + v$

$$\implies F_{\lambda}^{ROF}(u) = J(u) + \lambda \|v\|_{L^2}^2$$

Propriétés

Soit $g_N(x) = \cos(Nx_1)\theta(x)$ alors

$$\|g_N\|_{L^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \|\theta\|_{L^2} \text{ et } J(g_N) = \frac{N}{2\pi} \|\theta\|_{L^1}$$

Point de vue de la décomposition

Reformulation

Contrainte: $f = u + v$

$$\implies F_{\lambda}^{ROF}(u) = J(u) + \lambda \|v\|_{L^2}^2$$

Propriétés

Soit $g_N(x) = \cos(Nx_1)\theta(x)$ alors

$$\|g_N\|_{L^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \|\theta\|_{L^2} \text{ et } J(g_N) = \frac{N}{2\pi} \|\theta\|_{L^1}$$

Inadapté!

\implies ne gère pas les textures en tant que composante à part entière.

Algorithme de Y.Meyer

$$F_{\lambda}^{YM}(u, v) = J(u) + \lambda \|v\|_G$$

où $f = u + v$, $f \in G$, $u \in BV$, $v \in G$.

Modèle de décomposition

Algorithme de Y.Meyer

$$F_{\lambda}^{YM}(u, v) = J(u) + \lambda \|v\|_G$$

où $f = u + v$, $f \in G$, $u \in BV$, $v \in G$.

Propriété de $\|\cdot\|_G$



Modèle de décomposition

Algorithme de Y.Meyer

$$F_{\lambda}^{YM}(u, v) = J(u) + \lambda \|v\|_G$$

où $f = u + v$, $f \in G$, $u \in BV$, $v \in G$.

Propriété de $\|\cdot\|_G$



Problème!

$$\|v\|_G = \inf_g \left\| \left(|g_1|^2 + |g_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty}$$

où $g = (g_1, g_2) \in L^\infty \times L^\infty$, avec $v = \operatorname{div} g$

Approche de Osher-Vese (2002)

Propriété: $\forall f \in L^\infty, \|f\|_{L^\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p}$.

$$F_{\lambda, \mu, \rho}^{OV}(u, g) = J(u) + \lambda \|f - (u + \operatorname{div} g)\|_{L^2}^2 + \mu \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^p}$$

\implies trois EDP couplées (Euler-Lagrange).

Approche de Osher-Vese (2002)

Propriété: $\forall f \in L^\infty, \|f\|_{L^\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p}$.

$$F_{\lambda, \mu, \rho}^{OV}(u, g) = J(u) + \lambda \|f - (u + \operatorname{div} g)\|_{L^2}^2 + \mu \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^p}$$

\implies trois EDP couplées (Euler-Lagrange).

Hypothèse non respectée et instabilités numériques

Approche de JF. Aujol

- Discrétisation $X = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $Y = X \times X$ équipés de produits scalaires et normes euclidiens,
- Gradient: $(\nabla u)_{i,j} = \left((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2 \right)$ où,
- Divergence: $\text{div} = -\nabla^* (\langle -\text{div } p, u \rangle_X = \langle p, \nabla u \rangle_Y)$ où,
- $J(u) = \sum_{i,j} |(\nabla u)_{i,j}|$
- on a $J^{**} = J$ avec

$$J^*(v) = \chi_{G_1}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in G_1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Approche de JF. Aujol

- Discrétisation $X = \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$, $Y = X \times X$ équipés de produits scalaires et normes euclidiens,
- Gradient: $(\nabla u)_{i,j} = \left((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2 \right)$ où,

$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < M - 1 \\ 0 & \text{si } i = M - 1 \end{cases}$$

$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < N - 1 \\ 0 & \text{si } j = N - 1 \end{cases}$$

Approche de JF. Aujol

- Discrétisation $X = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $Y = X \times X$ équipés de produits scalaires et normes euclidiens,
- Gradient: $(\nabla u)_{i,j} = \left((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2 \right)$ où,
- Divergence: $\text{div} = -\nabla^* (\langle -\text{div } p, u \rangle_X = \langle p, \nabla u \rangle_Y)$ où,

$$(\text{div } p)_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{si } 0 < i < M - 1 \\ p_{i,j}^1 & \text{si } i = 0 \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{si } i = M - 1 \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{si } 0 < j < N - 1 \\ p_{i,j}^2 & \text{si } j = 0 \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{si } j = N - 1 \end{cases}$$

Approche de JF. Aujol

- Discrétisation $X = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $Y = X \times X$ équipés de produits scalaires et normes euclidiens,
- Gradient: $(\nabla u)_{i,j} = \left((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2 \right)$ où,
- Divergence: $\text{div} = -\nabla^* (\langle -\text{div } p, u \rangle_X = \langle p, \nabla u \rangle_Y)$ où,
- $J(u) = \sum_{i,j} |(\nabla u)_{i,j}|$
- on a $J^{**} = J$ avec

$$J^*(v) = \chi_{G_1}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in G_1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Approche de JF. Aujol

- Discrétisation $X = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $Y = X \times X$ équipés de produits scalaires et normes euclidiens,
- Gradient: $(\nabla u)_{i,j} = \left((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2 \right)$ où,
- Divergence: $\text{div} = -\nabla^*$ ($\langle -\text{div } p, u \rangle_X = \langle p, \nabla u \rangle_Y$) où,
- $J(u) = \sum_{i,j} |(\nabla u)_{i,j}|$
- on a $J^{**} = J$ avec

$$J^*(v) = \chi_{G_1}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in G_1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Algorithmes numériques (3/4)

Approche de JF. Aujol

Définition: $G = \{v \in X / \exists g \in Y, v = \operatorname{div} g\}$

Idée: restriction à $G_\mu = \{v \in G / \|v\|_G \leq \mu\}$



Approche de JF. Aujol

Définition: $G = \{v \in X / \exists g \in Y, v = \operatorname{div} g\}$

Idée: restriction à $G_\mu = \{v \in G / \|v\|_G \leq \mu\}$

Fonctionnelle

$$F_{\lambda, \mu}^{AU}(u, v) = J(u) + J^* \left(\frac{v}{\mu} \right) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v\|_{L^2}^2$$

où $(u, v) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$.

Approche de JF. Aujol

Définition: $G = \{v \in X / \exists g \in Y, v = \operatorname{div} g\}$

Idée: restriction à $G_\mu = \{v \in G / \|v\|_G \leq \mu\}$

Fonctionnelle

$$F_{\lambda, \mu}^{AU}(u, v) = J(u) + J^* \left(\begin{pmatrix} v \\ \mu \end{pmatrix} \right) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v\|_{L^2}^2$$

où $(u, v) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$.

⇒ Utilisation des projecteurs non-linéaires de Chambolle:

$$v \text{ fixé} \quad \hat{u} = f - v - P_{G_\lambda}(f - v)$$

$$u \text{ fixé} \quad \hat{v} = P_{G_\mu}(f - u)$$

$$\min_{u \in X} \frac{\|u - g\|^2}{2\lambda} + J(u)$$

avec $g \in X$, $\lambda > 0$, $\|\cdot\|$ norme euclidienne.

Euler-Lagrange \implies

$$\frac{2(u - g)}{2\lambda} + \partial J(u) \ni 0$$

$$\iff u - g + \lambda \partial J(u) \ni 0$$

∂J est la sous-différentielle de J défini par

$$w \in \partial J(u) \iff J(v) \geq J(u) + \langle w, v - u \rangle_X \quad \forall v$$

$$\frac{g - u}{\lambda} \in \partial J(u)$$

$$\iff \partial J^* \left(\frac{g - u}{\lambda} \right) \ni u$$

$$\iff \frac{u}{\lambda} \in \frac{1}{\lambda} \partial J^* \left(\frac{g - u}{\lambda} \right)$$

$$\iff \frac{g}{\lambda} \in \frac{g - u}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^* \left(\frac{g - u}{\lambda} \right)$$

Supposons que l'on cherche un minimiseur de

$$\frac{\|w - \left(\frac{g}{\lambda}\right)\|^2}{2} + \frac{1}{\lambda} J^*(w)$$

on applique Euler-Lagrange, on obtient alors

$$w - \frac{g}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^*(w) \ni 0$$

$$\iff w + \frac{1}{\lambda} \partial J^*(w) \ni \frac{g}{\lambda}$$

$$w = \frac{g - u}{\lambda}$$

est un minimiseur de $\frac{\|w - (\frac{g}{\lambda})\|^2}{2} + \frac{1}{\lambda} J^*(w)$

Or $J^*(w) = \chi_{G_1}(w)$ et si $w = P_{G_1}(\frac{g}{\lambda})$ (l'opérateur de projection sur G_1) alors $J^*(w) = 0$ et $\|w - \frac{g}{\lambda}\|$ est minimum.

$$P_{G_1} \left(\frac{g}{\lambda} \right) = \frac{g - u}{\lambda}$$

$$u = g - \lambda P_{G_1} \left(\frac{g}{\lambda} \right)$$

On note $P_{G_\lambda} \left(\frac{g}{\lambda} \right) = \lambda P_{G_1} \left(\frac{g}{\lambda} \right)$, on a alors

$$u = g - P_{G_\lambda} \left(\frac{g}{\lambda} \right)$$

Il reste donc à trouver le moyen de calculer $P_{G_\lambda}(g)$.

A. Chambolle donne le résultat suivant:

$$\text{calculer } P_{G_\lambda}(g) \iff \min_{p \in Y} \left\{ \|\lambda \operatorname{div}(p) - g\|^2; |p_{i,j}|^2 \leq 1 \quad \forall i,j \right\}$$

Conditions Karush-Kuhn-Tucker $\implies \exists$ multiplicateur de Lagrange $\alpha_{i,j} \geq 0$ tel que l'on ait $\forall i,j$:

$$-(\nabla(\lambda \operatorname{div}(p) - g))_{i,j} + \alpha_{i,j} p_{i,j} = 0$$

avec

$$\alpha_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad |p_{i,j}| = 1$$

$$\alpha_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad |p_{i,j}| < 1.$$

Si $\alpha_{i,j} = 0$, alors $(\nabla (\lambda \operatorname{div} (p) - g))_{i,j} = 0$; donc inintéressant.

Si $\alpha_{i,j} \neq 0$:

$$\alpha_{i,j} p_{i,j} = (\nabla (\operatorname{div} (p) - g))_{i,j}$$

$$\Rightarrow |\alpha_{i,j}| |p_{i,j}| = \left| (\nabla (\operatorname{div} (p) - g))_{i,j} \right|$$

or $|\alpha_{i,j}| = \alpha_{i,j}$ car $\alpha_{i,j} > 0$ et $|p_{i,j}| = 1$ donc

$$\alpha_{i,j} = \left| (\nabla (\operatorname{div} (p) - g))_{i,j} \right|$$

Descente de gradient avec $\tau > 0$; $p^0 = 0$; $n \geq 0$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \tau \left[\left(\nabla \left(\operatorname{div} (p^n) - \frac{g}{\lambda} \right) \right)_{i,j} - \left| \left(\nabla \left(\operatorname{div} (p^n) - \frac{g}{\lambda} \right) \right)_{i,j} \right| p_{i,j}^n \right]$$

Théorème

Si $\tau < \frac{1}{8}$ alors $\lambda \operatorname{div}(p^n)$ converge vers $P_{G_\lambda}(g)$ quand $n \rightarrow +\infty$

où

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau \left(\nabla \left(\operatorname{div}(p^n) - \frac{g}{\lambda} \right) \right)_{i,j}}{1 + \tau \left| \left(\nabla \left(\operatorname{div}(p^n) - \frac{g}{\lambda} \right) \right)_{i,j} \right|}$$

- 1 Initialisation:

$$u_0 = v_0 = 0$$

- 2 Itérations:

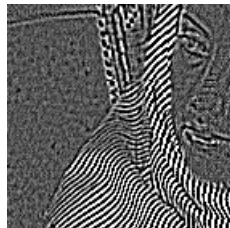
$$\begin{aligned}v_{n+1} &= P_{G_\mu}(f - u_n) \\u_{n+1} &= f - v_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1})\end{aligned}$$

- 3 On arrête l'algorithme si

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|) \leq \epsilon$$

ou si l'on atteint un nombre maximal d'itérations prescrit.

Exemple



BV- L^1

$$F_\lambda(u, v) = J(u) + \lambda \|v\|_{L^1}$$

BV-Hilbert

$$F_\lambda(u, v) = J(u) + \lambda \|v\|_{\mathcal{H}}$$

BV-Besov

$$F_\lambda(u, v) = J(u) + \lambda \|v\|_{\dot{B}_{-1, \infty}^\infty}$$

Cas des espaces de Sobolev - BMO

Voir les travaux de L.Vese, L.Triet (UCLA)

BV-Hilbert

$$F_\lambda(u, v) = J(u) + \frac{\lambda}{2} \|f - u\|_{\mathcal{H}}$$

Avec K est un opérateur positif symétrique et $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, Kg \rangle_{L^2}$.

Caractérisation des textures

Fréquence principale et direction \implies filtres de Gabor pour K .

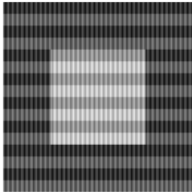
Théorème

Si $\tau < \frac{1}{8\|K^{-1}\|_{L^2}}$ alors $\frac{1}{\lambda}K^{-1}\text{div}(p^n)$ converge vers \hat{v} quand $n \rightarrow +\infty$ et $\hat{u} = f - \hat{v}$.

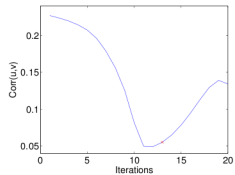
$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau \left(\nabla \left(K^{-1} \text{div}(p^n) - \frac{g}{\lambda} \right) \right)_{i,j}}{1 + \tau \left| \left(\nabla \left(K^{-1} \text{div}(p^n) - \frac{g}{\lambda} \right) \right)_{i,j} \right|}$$

BV-Hilbert - Résultat

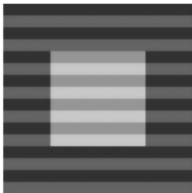
f



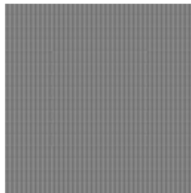
$\text{corr}(u, v)$



u



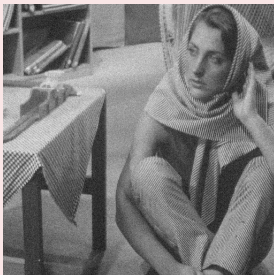
v



- Introduction,
- Décomposition d'image $u + v$,
- **Extension au cas bruité**,
- Choix du paramètre de régularisation λ ,
- et la couleur?,
- Application: détection de réseaux routiers,
- Conclusions - Perspectives.

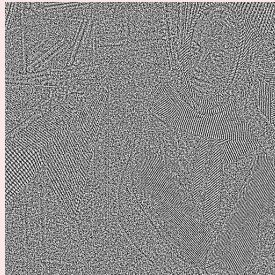
Cas des images bruitées

Le bruit est vu comme un phénomène oscillant!



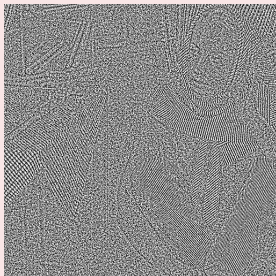
Cas des images bruitées

Le bruit est vu comme un phénomène oscillant!



Cas des images bruitées

Le bruit est vu comme un phénomène oscillant!



⇒ nécessite un modèle du type $u + v + w$.

Modèle $u + v + w$ adaptatif: principe

Hypothèses

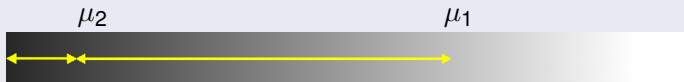
- textures $\in G_{\mu_1}$ et bruit $\in G_{\mu_2}$ où $\mu_1 \gg \mu_2$,



Modèle $u + v + w$ adaptatif: principe

Hypothèses

- textures $\in G_{\mu_1}$ et bruit $\in G_{\mu_2}$ où $\mu_1 \gg \mu_2$,



- adaptabilité locale au contenu de l'image.
- renforcer la régularisation en l'absence de textures,

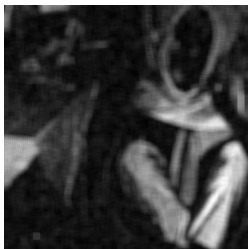
Modèle $u + v + w$ adaptatif: principe

Hypothèses

- textures $\in G_{\mu_1}$ et bruit $\in G_{\mu_2}$ où $\mu_1 \gg \mu_2$,



- adaptabilité locale au contenu de l'image.
- renforcer la régularisation en l'absence de textures,
- $\implies \nu(i, j) \in]0; 1[$ (carte des régions),



Modèle $u + v + w$ adaptatif: formulation

Algorithme adaptatif

$$F_{\lambda, \mu_1, \mu_2}^{JG}(u, v, w) = J(u) + J^* \left(\frac{v}{\mu_1} \right) + J^* \left(\frac{w}{\mu_2} \right) \\ + (2\lambda)^{-1} \|f - u - \nu_1 v - \nu_2 w\|_{L^2}^2$$

où $\nu_1 = 1 - \nu_2$ (cartes locales)

Modèle $u + v + w$ adaptatif: formulation

Algorithme adaptatif

$$F_{\lambda, \mu_1, \mu_2}^{JG}(u, v, w) = J(u) + J^* \left(\frac{v}{\mu_1} \right) + J^* \left(\frac{w}{\mu_2} \right) \\ + (2\lambda)^{-1} \|f - u - \nu_1 v - \nu_2 w\|_{L^2}^2$$

où $\nu_1 = 1 - \nu_2$ (cartes locales)

Solutions

$$\hat{u} = f - \nu_1 v - \nu_2 w - P_{G_\lambda}(f - \nu_1 v - \nu_2 w)$$

$$\hat{v} = P_{G_{\mu_1}} \left(\frac{f - u - \nu_2 w}{\nu_1} \right)$$

$$\hat{w} = P_{G_{\mu_2}} \left(\frac{f - u - \nu_1 v}{\nu_2} \right)$$

Modèle $u + v + w$ adaptatif: résultat



Modèle $u + v + w$ de Besov

Modèle

Bruit \iff distribution $\in E_\delta = \left\{ w \in \dot{B}_{-1,\infty}^\infty / \|w\|_{\dot{B}_{-1,\infty}^\infty} \leq \delta \right\}$

$$F_{\lambda,\mu,\delta}^{AG2}(u,v,w) = J(u) + J^* \left(\frac{v}{\mu} \right) + B^* \left(\frac{w}{\delta} \right) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v - w\|_{L^2}^2$$

Algorithme numérique

$$\hat{u} = f - \hat{v} - \hat{w} - P_{G_\lambda}(f - \hat{v} - \hat{w})$$

$$\hat{v} = P_{G_\mu}(f - \hat{u} - \hat{w})$$

$$\hat{w} = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - \hat{v}) = f - \hat{u} - \hat{v} - WST(f - \hat{u} - \hat{v}, 2\delta)$$

Modèle $u + v + w$ de Besov

Modèle

Bruit \iff distribution $\in E_\delta = \left\{ w \in \dot{B}_{-1,\infty}^\infty / \|w\|_{\dot{B}_{-1,\infty}^\infty} \leq \delta \right\}$

$$F_{\lambda,\mu,\delta}^{AC2}(u, v, w) = J(u) + J^* \left(\frac{v}{\mu} \right) + B^* \left(\frac{w}{\delta} \right) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v - w\|_{L^2}^2$$

Algorithme numérique

$$\hat{u} = f - \hat{v} - \hat{w} - P_{G_\lambda}(f - \hat{v} - \hat{w})$$

$$\hat{v} = P_{G_\mu}(f - \hat{u} - \hat{w})$$

$$\hat{w} = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - \hat{v}) = f - \hat{u} - \hat{v} - WST(f - \hat{u} - \hat{v}, 2\delta)$$

Modèle $u + v + w$ de Besov

Modèle

Bruit \iff distribution $\in E_\delta = \left\{ w \in \dot{B}_{-1,\infty}^\infty / \|w\|_{\dot{B}_{-1,\infty}^\infty} \leq \delta \right\}$

$$F_{\lambda,\mu,\delta}^{AC2}(u, v, w) = J(u) + J^* \left(\frac{v}{\mu} \right) + B^* \left(\frac{w}{\delta} \right) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v - w\|_{L^2}^2$$

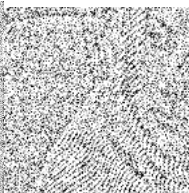
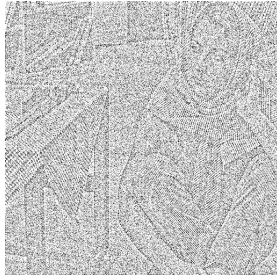
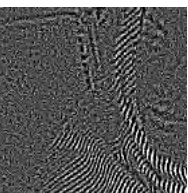
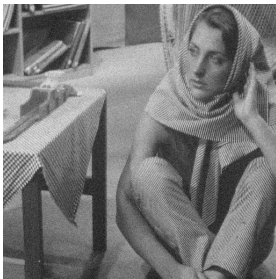
Algorithme numérique

$$\hat{u} = f - \hat{v} - \hat{w} - P_{G_\lambda}(f - \hat{v} - \hat{w})$$

$$\hat{v} = P_{G_\mu}(f - \hat{u} - \hat{w})$$

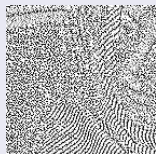
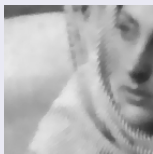
$$\hat{w} = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - \hat{v}) = f - \hat{u} - \hat{v} - WST(f - \hat{u} - \hat{v}, 2\delta)$$

Modèle $u + v + w$ de Besov: résultat

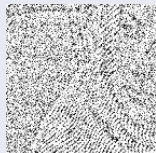
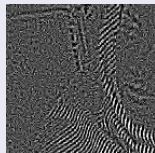
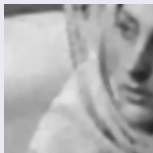


Comparaison visuelle

Adaptatif



Besov



Comparaison

- textures mieux débruitées dans le modèle de Aujol et Chambolle,
- plus de résidu dans le bruit du modèle de Aujol et Chambolle,
- les contours “abîmés” dans le modèle de Aujol et Chambolle.

Aujourd'hui...

- apport de la géométrie en analyse multi-résolution,
- résultats de débruitage prometteurs avec les *curvelets* de Candès et Donoho,
- implémentation numérique difficile.

Aujourd'hui...

- apport de la géométrie en analyse multi-résolution,
- résultats de débruitage prometteurs avec les *curvelets* de Candès et Donoho,
- implémentation numérique difficile.

Aujourd'hui...

- apport de la géométrie en analyse multi-résolution,
- résultats de débruitage prometteurs avec les *curvelets* de Candès et Donoho,
- implémentation numérique difficile.

Aujourd'hui...

- apport de la géométrie en analyse multi-résolution,
- résultats de débruitage prometteurs avec les *curvelets* de Candès et Donoho,
- implémentation numérique difficile.

Point de vue numérique

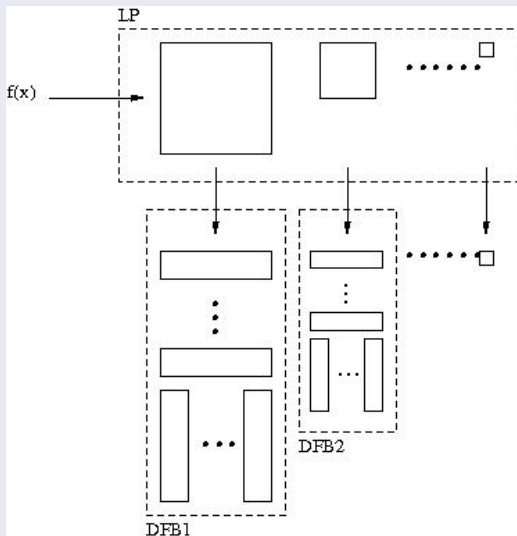
Minh Do et Vetterli proposent l'utilisation de:

- la théorie des bancs de filtres
- la théorie des *frames*

⇒ *Pyramidal Directionnal Filter Bank (PDFB)*

Principe des *contourlets*

Pyramide Laplacienne + Filtrage Directionnel



Théorème

$\forall \{l_j\}_{j \leq j_0}$ la famille

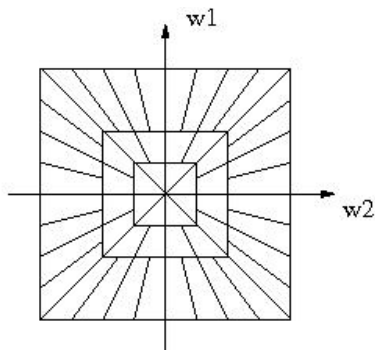
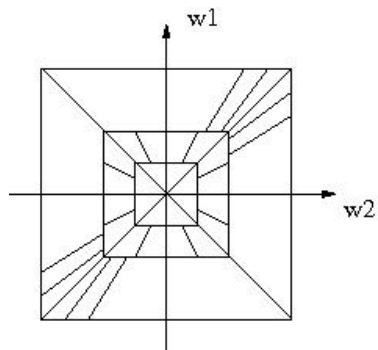
$$\left\{ \phi_{j_0,n}(t); \rho_{j,k,n}^{(l)}(t) \right\}_{j \leq j_0, 0 \leq k \leq 2^j - 1, n \in \mathbb{Z}^2}$$

est une *frame* ajustée de $L_2(\mathbb{R}^2)$ de borne 1.

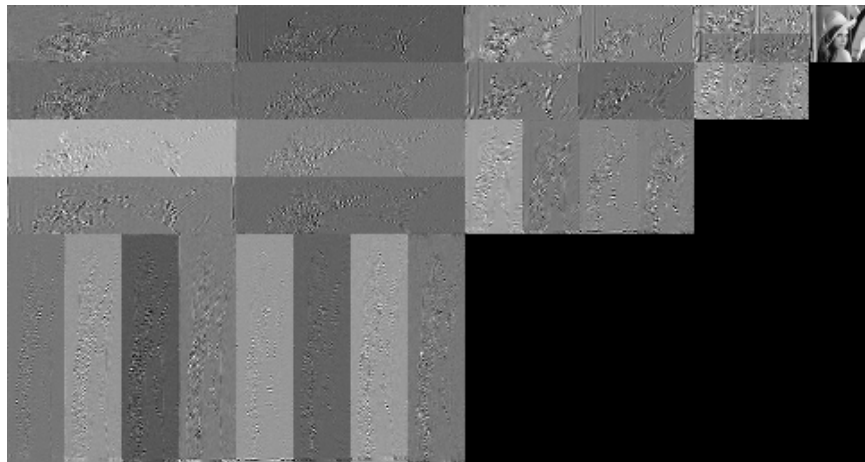
Et l'on a

$$L_2(\mathbb{R}^2) = V_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{j \leq j_0} W_j^{(l)} \right)$$

Pavage du domaine fréquentiel



Exemple de transformée



Utilisation pour la décomposition

Apport de la géométrie

Remplacement: ondelettes \implies contourlettes

Apport de la géométrie

Remplacement: ondelettes \implies contourlettes

- Espaces de contourlettes $CT_{p,q}^s$ et $\|\cdot\|_{CT_{p,q}^s}$

• Seuillage doux \iff projection sur

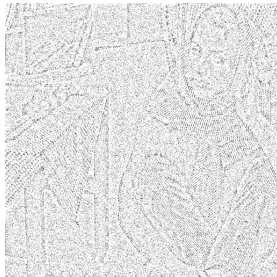
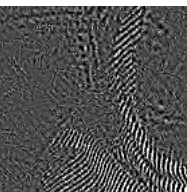
$$CT_\delta = \left\{ f \in CT_{-1,\infty}^\infty / \|f\|_{CT_{-1,\infty}^\infty} \leq \delta \right\}.$$

Apport de la géométrie

Remplacement: ondelettes \implies contourlettes

- Espaces de contourlettes $CT_{p,q}^s$ et $\|\cdot\|_{CT_{p,q}^s}$
- Seuillage doux \iff projection sur
 $CT_\delta = \left\{ f \in CT_{-1,\infty}^\infty / \|f\|_{CT_{-1,\infty}^\infty} \leq \delta \right\}$.

Modèle $u + v + w$ avec contourlettes: résultat



- Introduction,
- Décomposition d'image $u + v$,
- Extension au cas bruité,
- **Choix du paramètre de régularisation λ ,**
- et la couleur?,
- Application: détection de réseaux routiers,
- Conclusions - Perspectives.

Problème

- Les solutions de $E_{structures}(u) + \lambda E_{texture}(v)$ avec $f = u + v$ sont (u_λ, v_λ) ,
- Le choix de λ est difficile (pas de notion de σ^2 comme pour le débruitage).

Problème

- Les solutions de $E_{structures}(u) + \lambda E_{texture}(v)$ avec $f = u + v$ sont (u_λ, v_λ) ,
- Le choix de λ est difficile (pas de notion de σ^2 comme pour le débruitage).

Choix du paramètre de régularisation λ

Problème

- Les solutions de $E_{structures}(u) + \lambda E_{texture}(v)$ avec $f = u + v$ sont (u_λ, v_λ) ,
- Le choix de λ est difficile (pas de notion de σ^2 comme pour le débruitage).

Un bon candidat!

- Mrazek suggère: les composantes textures et structures sont décorrélées,
- Choix: $\lambda^* = \arg \min_\lambda (corr(u_\lambda, v_\lambda))$.

Choix du paramètre de régularisation λ

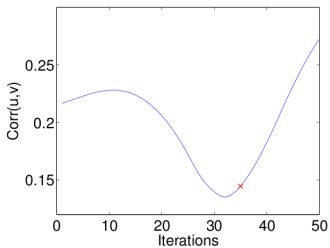
Problème

- Les solutions de $E_{structures}(u) + \lambda E_{texture}(v)$ avec $f = u + v$ sont (u_λ, v_λ) ,
- Le choix de λ est difficile (pas de notion de σ^2 comme pour le débruitage).

Un bon candidat!

- Mrazek suggère: les composantes textures et structures sont décorrélées,
- Choix: $\lambda^* = \arg \min_\lambda (corr(u_\lambda, v_\lambda))$.

Expérimentations



u_{ROF}



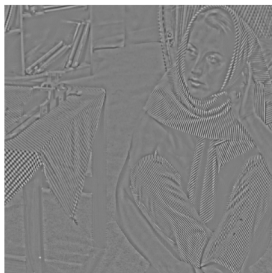
u_{A^2BC}



v_{ROF}



v_{A^2BC}



- Introduction,
- Décomposition d'image $u + v$,
- Extension au cas bruité,
- Choix du paramètre de régularisation λ ,
- **et la couleur?**,
- Application: détection de réseaux routiers,
- Conclusions - Perspectives.

Extension au cas des images couleurs

BV et G pour la couleur

Chan et al. étendent BV au cas couleur en utilisant les canaux de chrominance et de luminosité.

Norme G -couleur est la semi-norme polaire de la variation total couleur (Aujol et Kang)

2



Original image



u



v

- Introduction,
- Décomposition d'image $u + v$,
- Extension au cas bruité,
- Choix du paramètre de régularisation λ ,
- et la couleur?,
- **Application: détection de réseaux routiers,**
- Conclusions - Perspectives.

Lemme

Réhaussement d'objets longilignes

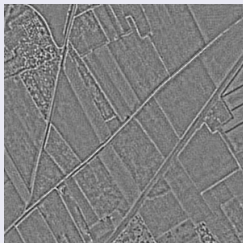
Soit f la fonction indicatrice de l'ensemble E_N défini par

$$E_N = [0, 1] \times [0, N]$$

quand N est grand f correspondra à un objet longiligne dans l'image. On a alors

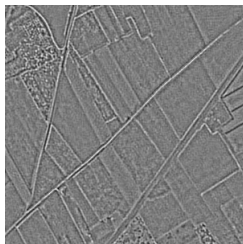
$$\|f\|_G \in \left[\left(2 + \frac{2}{N}\right)^{-1}, \frac{1}{2} \right]$$

Exemple



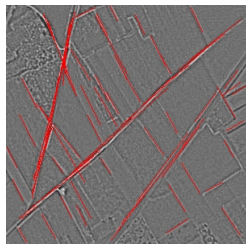
Algorithme de détection

- Extraction des textures,
 - Détecteur d'alignements + règles de fusion
⇒ liste de segments,
 - Contour actif statistique
⇒ liste de courbes
[scale=0.5]snake



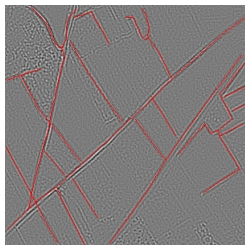
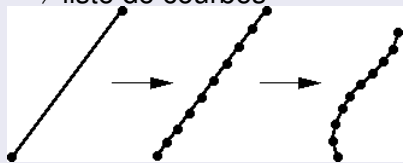
Algorithme de détection

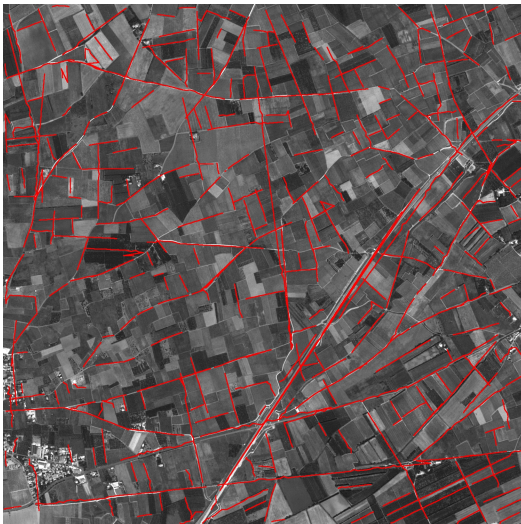
- Extraction des textures,
- Détecteur d'alignements + règles de fusion
⇒ liste de segments,
- Contour actif statistique
⇒ liste de courbes
[scale=0.5]snake



Algorithme de détection

- Extraction des textures,
- Détecteur d'alignements + règles de fusion
⇒ liste de segments,
- Contour actif statistique
⇒ liste de courbes





- Introduction,
- Décomposition d'image $u + v$,
- Extension au cas bruité,
- Choix du paramètre de régularisation λ ,
- et la couleur?,
- Application: détection de réseaux routiers,
- **Conclusions - Perspectives.**

Conclusions

- Utilisation d'espaces de fonctions,
- Existence de projecteurs non linéaires,
- Séparation des composantes structures, textures et bruit,
- Inclusion de la géométrie des images (contourlettes),
- Propriété de réhaussement des objets longilignes.

Conclusions

- Utilisation d'espaces de fonctions,
- Existence de projecteurs non linéaires,
- Séparation des composantes structures, textures et bruit,
- Inclusion de la géométrie des images (contourlettes),
- Propriété de réhaussement des objets longilignes.

Conclusions

- Utilisation d'espaces de fonctions,
- Existence de projecteurs non linéaires,
- Séparation des composantes structures, textures et bruit,
- Inclusion de la géométrie des images (contourlettes),
- Propriété de réhaussement des objets longilignes.

Conclusions

- Utilisation d'espaces de fonctions,
- Existence de projecteurs non linéaires,
- Séparation des composantes structures, textures et bruit,
- Inclusion de la géométrie des images (contourlettes),
- Propriété de réhaussement des objets longilignes.

Conclusions

- Utilisation d'espaces de fonctions,
- Existence de projecteurs non linéaires,
- Séparation des composantes structures, textures et bruit,
- Inclusion de la géométrie des images (contourlettes),
- Propriété de réhaussement des objets longilignes.

Perspectives

- Choix de l'espace de fonction,
- Choix des paramètres,
- Travaux sur l'adaptativité spatiale des algorithmes,
- Explorer les applications potentielles.

Perspectives

- Choix de l'espace de fonction,
- Choix des paramètres,
- Travaux sur l'adaptativité spatial des algorithmes,
- Explorer les applications potentielles.

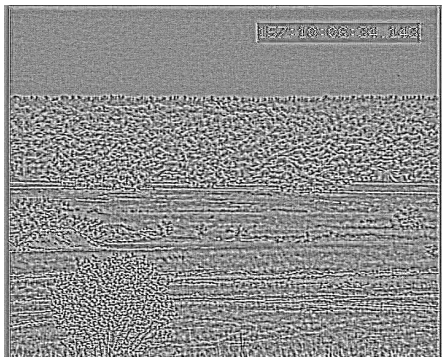
Perspectives

- Choix de l'espace de fonction,
- Choix des paramètres,
- Travaux sur l'adaptativité spatiale des algorithmes,
- Explorer les applications potentielles.

Perspectives

- Choix de l'espace de fonction,
- Choix des paramètres,
- Travaux sur l'adaptativité spatiale des algorithmes,
- Explorer les applications potentielles.

Analyse des textures



<http://jerome.gilles91.free.fr> <http://www.cmla.ens-cachan.fr/~aujol/>



J.F. Aujol.

Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles.

PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2004.



J.F. Aujol and A. Chambolle.

Dual norms and image decomposition models.

International Journal of Computer Vision, 63(1):85–104, 2005.



J.F. Aujol, G. Gilboa, T. Chan, and S. Osher.

Structure-texture image decomposition-modeling, algorithms and parameter selection.

International Journal of Computer Vision, 67(1):111–136, 2006.



J.F. Aujol and S.H. Kang.

Color image decomposition and restoration.

Journal of Visual Communication and Image Representation, 2006.



A. Chambolle.

An algorithm for total variation minimization and applications.

Journal of Mathematical Imaging and Vision, 20(1-2):89–97, mars 2004.



A. Chambolle, R.A. DeVore, N. Lee, and B.J. Lucier.

Nonlinear wavelet image processing: variational problems, compression and noise removal through wavelet shrinkage.

IEEE Trans. on Image Processing, 7:319–335, 1998.



M.N. Do.

Directional Multiresolution Image Representations.

PhD thesis, Department of Communication Systems, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne, 2001.



J.Gilles.

Décomposition et détection de structures géométriques en imagerie.

PhD thesis, CMLA - ENS Cachan, 2006.



J.Gilles.

Noisy image decomposition: a new structure, texture and noise model based on local adaptivity.

Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006.



Y. Meyer.

Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations.

The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures, American Mathematical Society, 2001.



L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi.

Nonlinear total variation based noise removal algorithms.

Physica D, 60:259–268, 1992.



L. Vese and S. Osher.

Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing.

Journal of Scientific Computing, 19(1-3):553–572, 2002.