LES BASES DE L'ANALYSE HARMONIQUE

Jérôme Gilles

UCLA

TROISIEME PARTIE

Ondelettes

Au menu ...

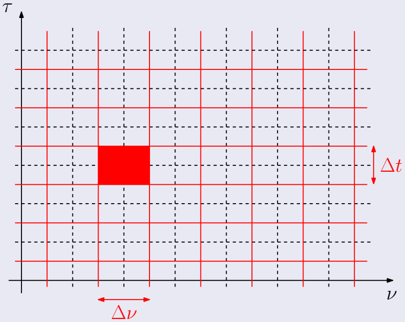
- Rappel sur les limitations de la TFCT
- Familles d'ondelettes et plan temps-fréquence “adaptatif”
- Transformée en ondelette : définition et propriétés
- Principe de l'Analyse Multirésolution (AMR)
- Extensions au cas 2D
- Applications (approximation, débruitage, compression)

Rappels ...

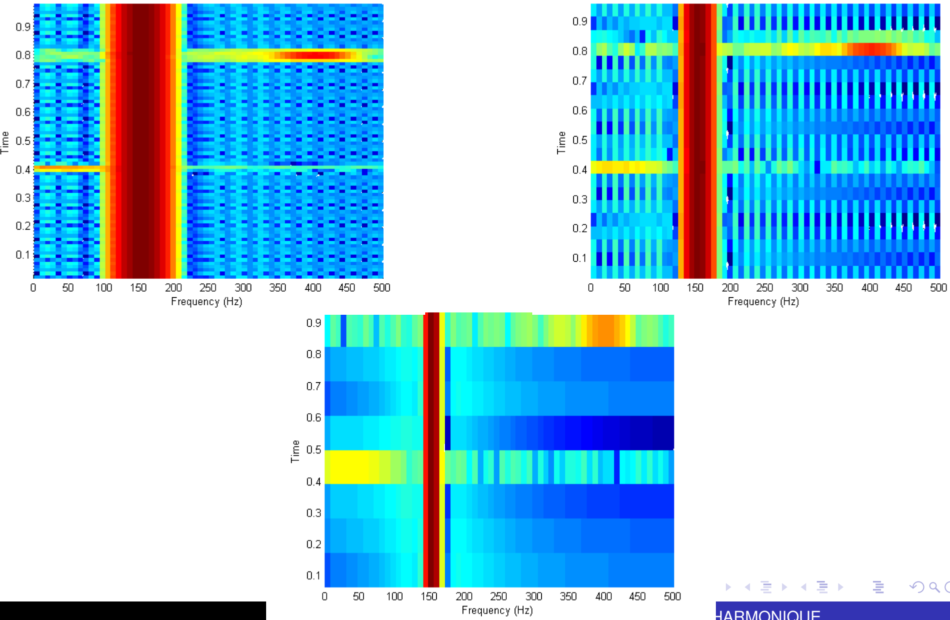
La TFCT

$$S_f(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau) f(t) e^{-\jmath 2\pi\nu t} dt$$

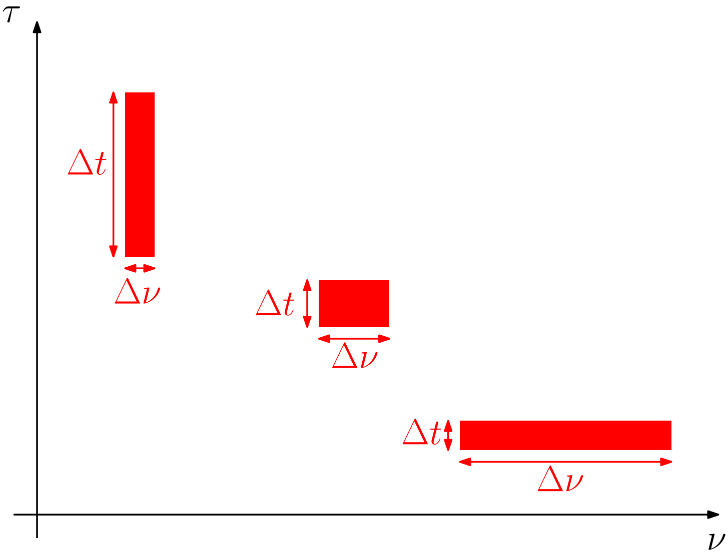
Pavage rigide du plan temps-fréquence



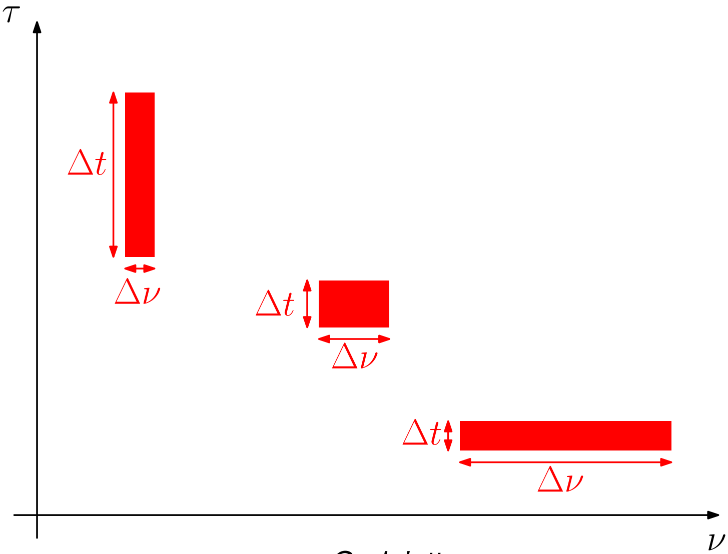
Les limites de la TFCT



Plan temps-fréquence adaptatif



Plan temps-fréquence adaptatif



$\Rightarrow$ *Ondelettes*

Un peu d'histoire ...

- 1946, Denis Gabor : TFCT avec fenêtre gaussienne.

Un peu d'histoire ...

- 1946, Denis Gabor : TFCT avec fenêtre gaussienne.
- 1982, Jean Morlet : applications en géophysique, propose d'échanger la modulation par la dilatation d'une fonction fixe.

Un peu d'histoire ...

- 1946, Denis Gabor : TFCT avec fenêtre gaussienne.
- 1982, Jean Morlet : applications en géophysique, propose d'échanger la modulation par la dilatation d'une fonction fixe.
- 1984, Alex Grossmann et l'équipe de Marseille : lien entre l'ondelette de Morlet et les états cohérents en physique quantique + lien avec la théorie des *frames*.

Un peu d'histoire ...

enis Gabor : TFCT avec fenêtre gaussienne.

ean Morlet : applications en géophysique, propose
nger la modulation par la dilatation d'une fonction

lex Grossmann et l'équipe de Marseille : lien entre
ette de Morlet et les états cohérents en physique
quantique + lien avec la théorie des *frames*.

- 1985, Yves Meyer : fait le lien avec l'analyse harmonique et pose tous les fondements mathématiques de la théorie + découverte de l'existence d'une base orthonormée (1986).

Un peu d'histoire ...

- 1946, Denis Gabor : TFCT avec fenêtre gaussienne.
- 1982, Jean Morlet : applications en géophysique, propose d'échanger la modulation par la dilatation d'une fonction fixe.
- 1984, Alex Grossmann et l'équipe de Marseille : lien entre l'ondelette de Morlet et les états cohérents en physique quantique + lien avec la théorie des *frames*.
- 1985, Yves Meyer : fait le lien avec l'analyse harmonique et pose tous les fondements mathématiques de la théorie + découverte de l'existence d'une base orthonormée (1986).
- et ensuite . . . : S.Mallat, I.Daubechies, R.Coiffman, A.Cohen, . . .

Avant avec Fourier

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\jmath 2\pi\nu t} dt = \langle f, e^{\jmath 2\pi\nu t} \rangle$$

On projete le signal f sur la famille de fonctions $\{e^{\jmath 2\pi\nu t}\}$.

C'est cette famille qui fixe la structure du pavage du plan temps-fréquence.

Avant avec Fourier

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\jmath 2\pi\nu t} dt = \langle f, e^{\jmath 2\pi\nu t} \rangle$$

On projete le signal f sur la famille de fonctions $\{e^{\jmath 2\pi\nu t}\}$.

C'est cette famille qui fixe la structure du pavage du plan temps-fréquence.

Peut-on trouver une autre famille de fonctions qui nous donnerait le pavage souhaité ?

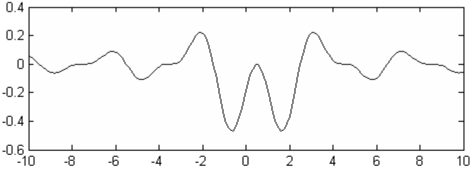
Famille d'ondelettes

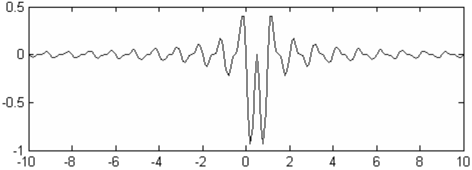
On choisit une ondelette "mère" $\psi(t)$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$ (moyenne nulle) et $\|\psi\|_{L^2} = 1$

On construit une famille d'ondelettes par dilatation/contraction (facteur $a \in \mathbb{R}^+$) et translation (facteur $b \in \mathbb{R}$) de l'ondelette mère :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Rq : $\|\psi_{a,b}\|_{L^2} = 1$





Transformée en ondelettes

CWT

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

Condition d'admissibilité : si $C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\nu)|^2}{\nu} d\nu < +\infty$ alors

Transformée inverse

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2}$$

Premières propriétés

Conservation de l'énergie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_f(a,b)|^2 db \frac{da}{a^2}$$

La CWT est un filtrage !

Si l'on écrit

$$\bar{\psi}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{-t}{a} \right)$$

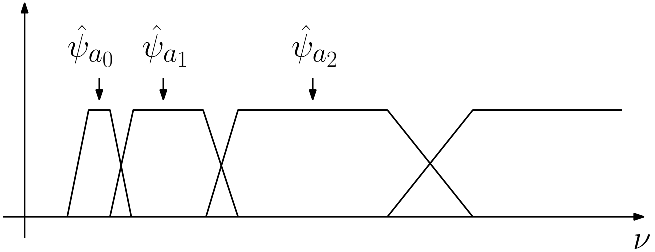
alors

$$W_f(a,b) = f \star \bar{\psi}_a(b)$$

Rq : $\widehat{\bar{\psi}_a}(\nu) = \sqrt{a} \widehat{\psi^*}(a\nu)$.

Interprétation

La transformée en ondelette est un filtrage du type passe-bande !



Conséquence : on ne peut pas avoir la fréquence nulle $\longrightarrow$ complémentarité obtenue avec la **fonction d'échelle.**

Fonction d'échelle 1/2

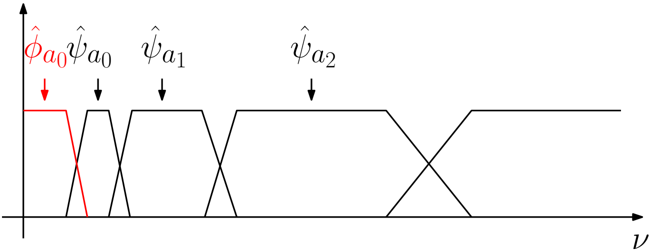
Hyp : on connait $W_f(a, b)$ pour $a < a_0 \longrightarrow$ on a besoin de connaître l'information pour $a \geqslant a_0$ pour reconstruire parfaitement f. Pour cela on utilise la fonction d'échelle qui est définie à partir de l'ondelette utilisée par le biais de leurs TF :

$$|\hat{\phi}(\nu)|^2 = \int_{\nu}^{+\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi}$$

Ici aussi on peut écrire $\bar{\phi}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\phi^*\left(\frac{-t}{a}\right)$ et l'information manquante peut être vue comme un filtrage passe-bas :

$$L_f(a, b) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}}\phi\left(\frac{t-u}{a}\right)\right\rangle = f \star \bar{\phi}_a(u)$$

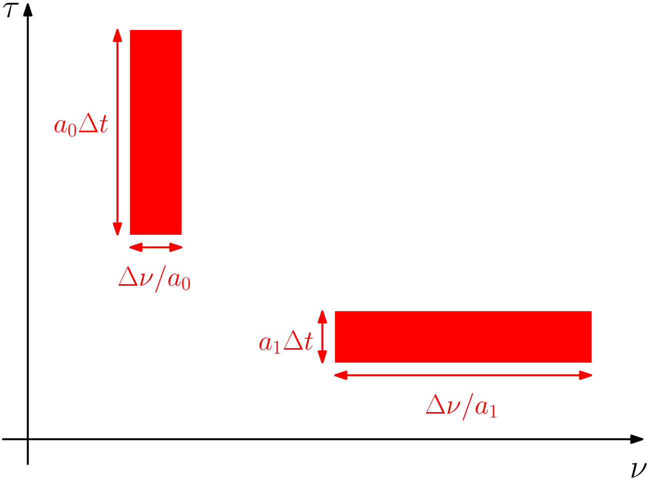
Fonction d'échelle 2/2



La reconstruction s'obtient alors par :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^{a_0} W_f(a,.)\star\psi_a(t)\frac{da}{a^2} + \frac{1}{C_\psi a_0}L_f(a,.)\star\phi_{a_0}(t)$$

Pavage de plan temps-fréquence



Discrétisation

- Signaux échantillonnés ($pas = N^{-1}$).

Discrétisation

- Signaux échantillonnés ($pas = N^{-1}$).
- Echelles discrètes : $a = (2^{1/\nu})^j$ (ν échelles par octave $[2^j, 2^{j+1}[$).

Discrétisation

- Signaux échantillonnés ($pas = N^{-1}$).
- Echelles discrètes : $a = (2^{1/\nu})^j$ (ν échelles par octave $[2^j, 2^{j+1}[$).
- L'ondelette dilatée est donc définie par ($d = 2^{1/\nu}$) $\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{d^j}} \psi\left(\frac{n}{d^j}\right)$.

Discrétisation

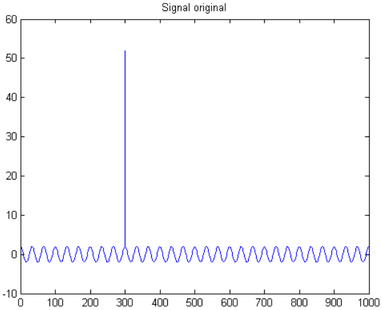
- Signaux échantillonnés ($pas = N^{-1}$).
- Echelles discrètes : $a = (2^{1/\nu})^j$ (ν échelles par octave $[2^j, 2^{j+1}[$).
- L'ondelette dilatée est donc définie par ($d = 2^{1/\nu}$) $\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{d^j}}\psi\left(\frac{n}{d^j}\right)$.
- Transformée discrète : $W_f[n, d^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\psi_j^*[m-n] = f \circledast \bar{\psi}_j[n]$ (périodisation du signal).

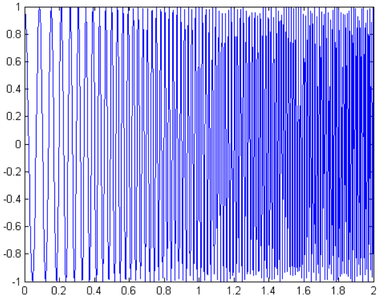
Discrétisation

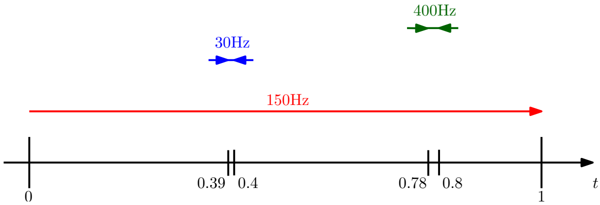
- Signaux échantillonnés ($pas = N^{-1}$).
- Echelles discrètes : $a = (2^{1/\nu})^j$ (ν échelles par octave $[2^j, 2^{j+1}[$).
- L'ondelette dilatée est donc définie par ($d = 2^{1/\nu}$) $\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{d^j}}\psi\left(\frac{n}{d^j}\right)$.
- Transformée discrète : $W_f[n, d^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\psi_j^*[m-n] = f \circledast \bar{\psi}_j[n]$ (périodisation du signal).
- Fonction d'échelle : $\phi_J[n] = \frac{1}{\sqrt{d^J}}\phi\left(\frac{n}{d^J}\right)$ où $a_0 = d^J$.

- Signaux échantillonnés ($pas = N^{-1}$).
- Echelles discrètes : $a = (2^{1/\nu})^j$ (ν échelles par octave $[2^j, 2^{j+1}[$).
- L'ondelette dilatée est donc définie par ($d = 2^{1/\nu}$) $\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{d^j}}\psi\left(\frac{n}{d^j}\right)$.
- Transformée discrète : $W_f[n, d^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\psi_j^*[m-n] = f \circledast \bar{\psi}_j[n]$ (périodisation du signal).
- Fonction d'échelle : $\phi_J[n] = \frac{1}{\sqrt{d^J}}\phi\left(\frac{n}{d^J}\right)$ où $a_0 = d^J$.
- BF s'obtiennent par : $L_f[n, d^J] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\phi_J^*[m-n] = f \circledast \bar{\phi}_J[n]$

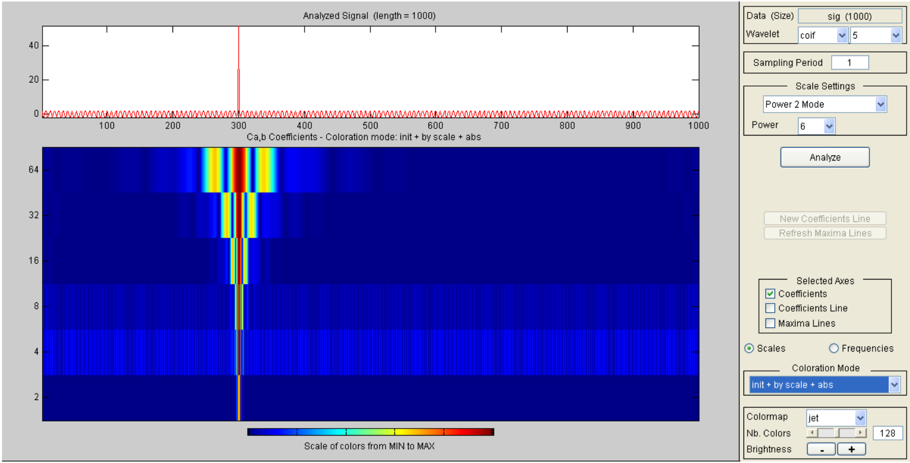
Même signaux de test que le cours sur Fourier :



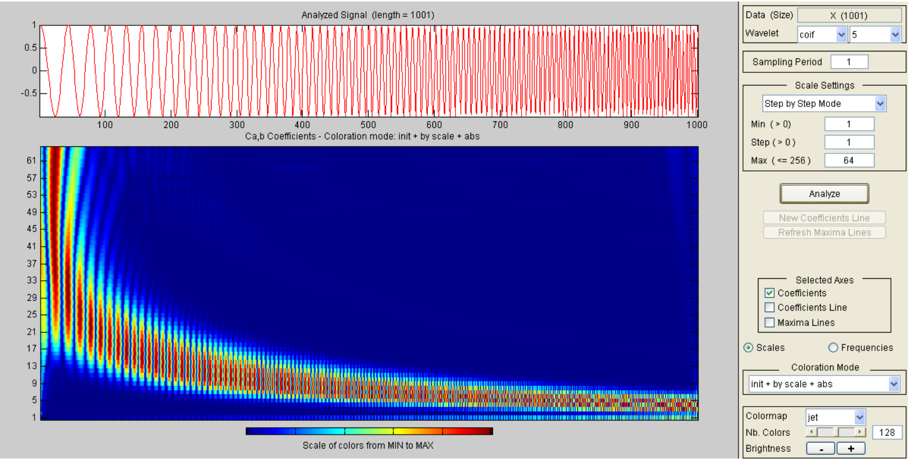




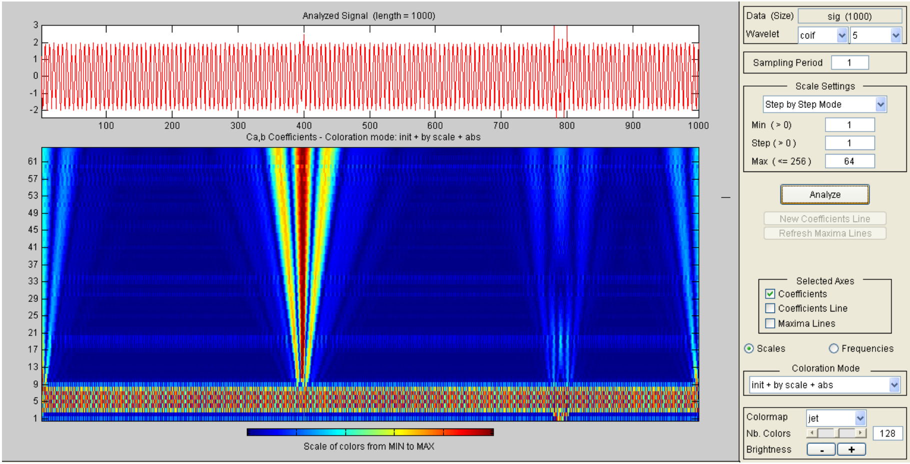
Quelques exemples 2/4



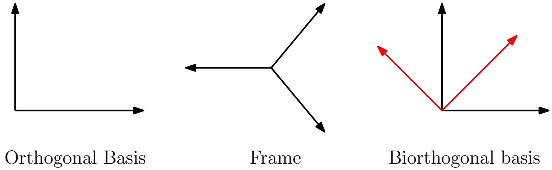
Quelques exemples 3/4



Quelques exemples 4/4



En géometrie

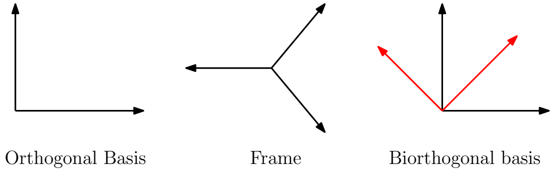


Bases orthogonales

$\{e_n\}$ est une base orthogonale si $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $m \neq n$.

Notions de Bases et Trames

En géometrie

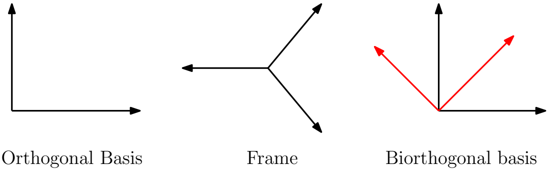


Trame (*frame*)

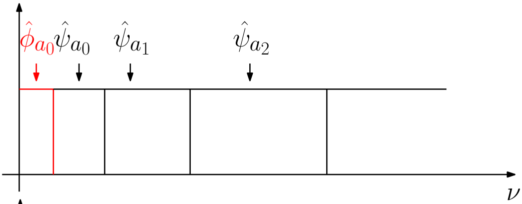
$\{e_n\}$ est une trame si $\exists A, B > 0$ telles que
$A\|f\|^2_{L^2} \leqslant \sum_{n\in\Gamma} |\langle f, e_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2_{L^2} \Rightarrow$ redondance.
La reconstruction se fait à l'aide de l'opérateur pseudo-inverse qui utilise une trame dual $\{\tilde{e}_n\}$.
Si $A = B$ on a alors une trame ajustée (*tight frame*)
Si $A = B = 1$ on a alors une base orthonormée.

Notions de Bases et Trames

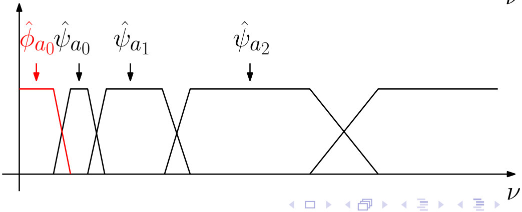
En géometrie



Base orthogonale

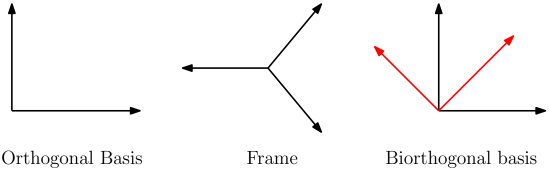


Trame



Notions de Bases et Trames

En géometrie



Base biorthogonale

Soit deux familles d'ondelettes $\{\psi_{j,n}\}$ et $\{\tilde{\psi}_{j,n}\}$, elles sont dites biorthogonales si

$$\langle \psi_{j,n}, \tilde{\psi}_{j',n'} \rangle = \delta[n-n']\delta[j-j'] \qquad \forall (j,j',n,n') \in \mathbb{Z}^4$$

Un cas particulier : le cas dyadique

Les échelles sont discrétisée en prennant $a = 2^j$.

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$$

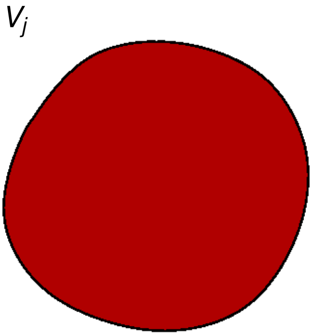
Plusieurs avantages :

- Possibilité de construire “facilement” des bases orthogonales ayant certaines propriétés (régularité, compacité du support, ...).
- Lien avec la théorie des filtres miroirs conjugués.
- Algorithme rapide en utilisant des bancs de filtres sous-échantillonnés.
- Construction aisée d’une analyse multirésolution.

Analyse Multirésolution (AMR)

AMR

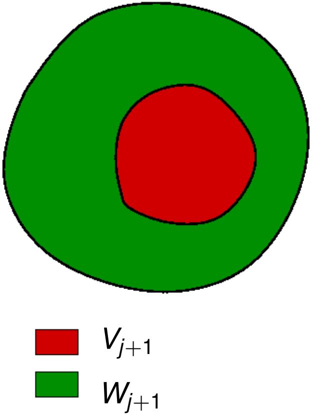
- $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t-2^j k) \in V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$
- $\lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$
- $\lim_{j\to-\infty} V_j = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$
- $\exists \{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ base de Riesz de V_0.



Analyse Multirésolution (AMR)

AMR

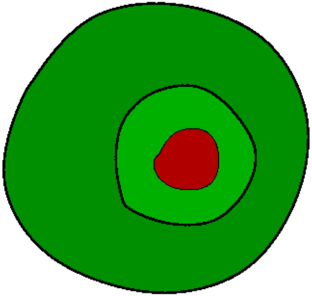
- $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$
- $\lim_{j \to +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$
- $\lim_{j \to -\infty} V_j = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$
- $\exists \{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ base de Riesz de V_0.



Analyse Multirésolution (AMR)

AMR

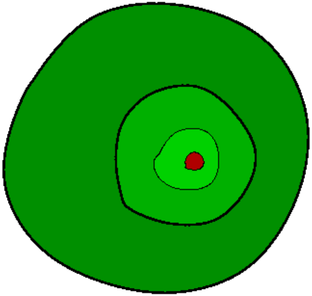
- $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$
- $\lim_{j \to +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$
- $\lim_{j \to -\infty} V_j = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$
- $\exists \{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ base de Riesz de V_0.



Analyse Multirésolution (AMR)

AMR

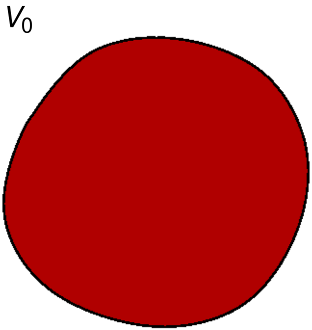
- $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$
- $\lim_{j \to +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$
- $\lim_{j \to -\infty} V_j = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$
- $\exists \{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ base de Riesz de V_0.



Analyse Multirésolution (AMR)

AMR

- $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$
- $\lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$
- $\lim_{j\to-\infty} V_j = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$
- $\exists \{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ base de Riesz de V_0.



AMR et ondelettes

$V_j \Leftrightarrow$ basses résolutions $\Leftrightarrow a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$
$W_j \Leftrightarrow$ hautes résolutions (détails) $\Leftrightarrow d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$

AMR et ondelettes

$V_j \Leftrightarrow$ basses résolutions $\Leftrightarrow a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$
$W_j \Leftrightarrow$ hautes résolutions (détails) $\Leftrightarrow d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$

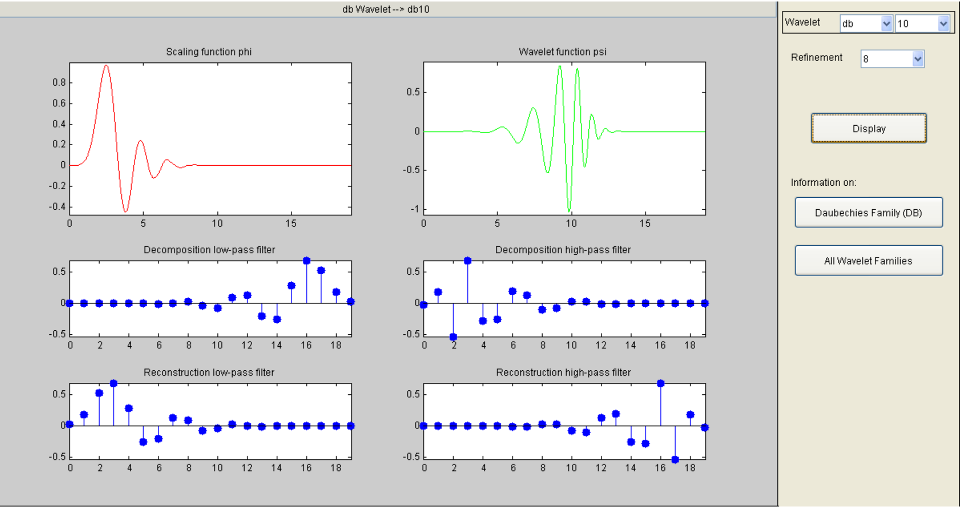
Théorème de Mallat (transformée récursive)

Numériquement, on peut construire des filtres numériques h et g correspondant respectivement à ϕ et ψ tels que

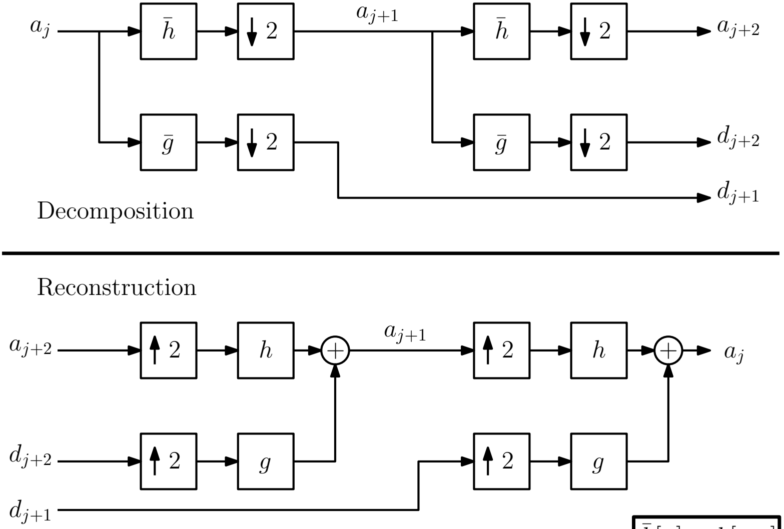
$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p]a_j[n]$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p]a_j[n]$$

Exemple de filtres

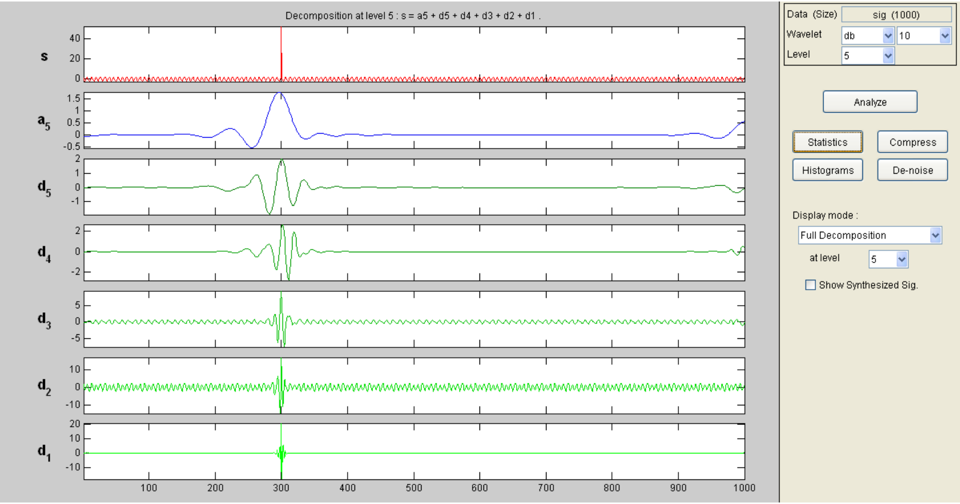


Transformée en ondelettes rapide

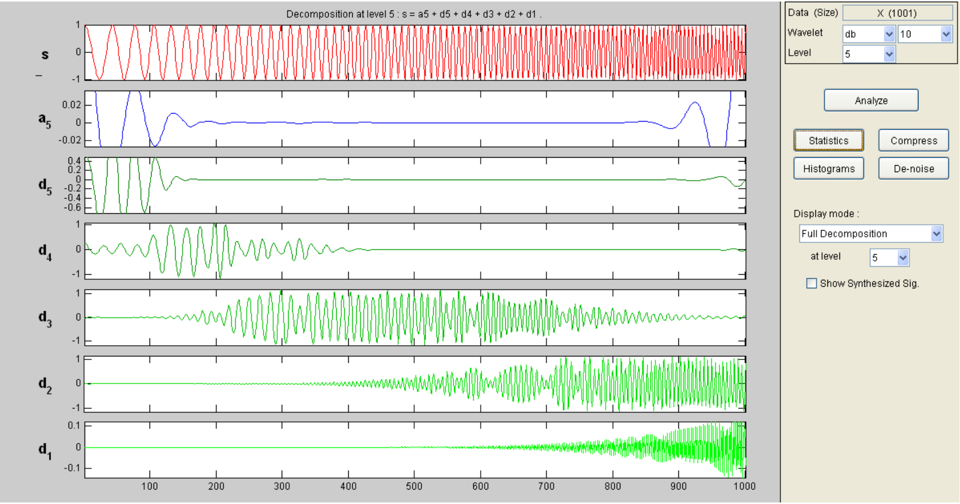


$$\boxed{\begin{aligned}\bar{h}[n] &= h[-n]\\ \bar{g}[n] &= g[-n]\end{aligned}}$$

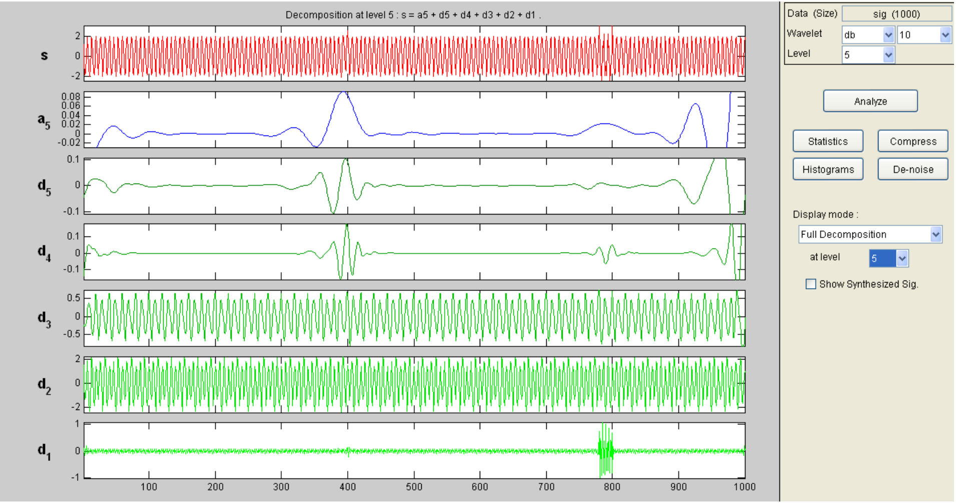
Exemples (sans sous-échantillonnage)



Exemples (sans sous-échantillonnage)



Exemples (sans sous-échantillonnage)



Extension en 2D

$\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow \phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$.

Extension en 2D

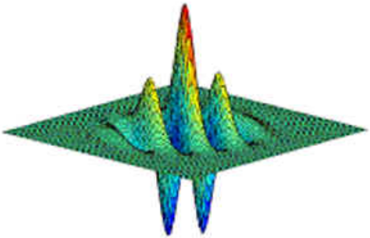
$\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow \phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$.

Deux stratégies

- Construire directement des fonctions à deux variables (ex : filtres de Gabor).
- Utiliser des filtres séparables via des transformées 1D.

Extension en 2D : Construction directe

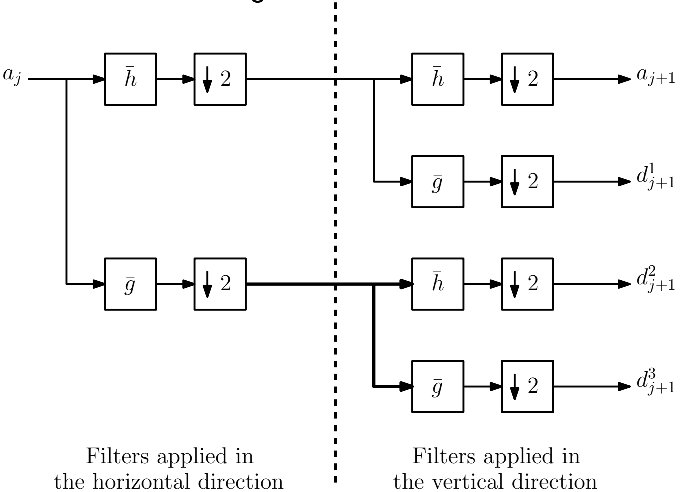
Ex : ondelettes de Gabor, ondelette de Morlet, ondelette de Cauchy, . . .



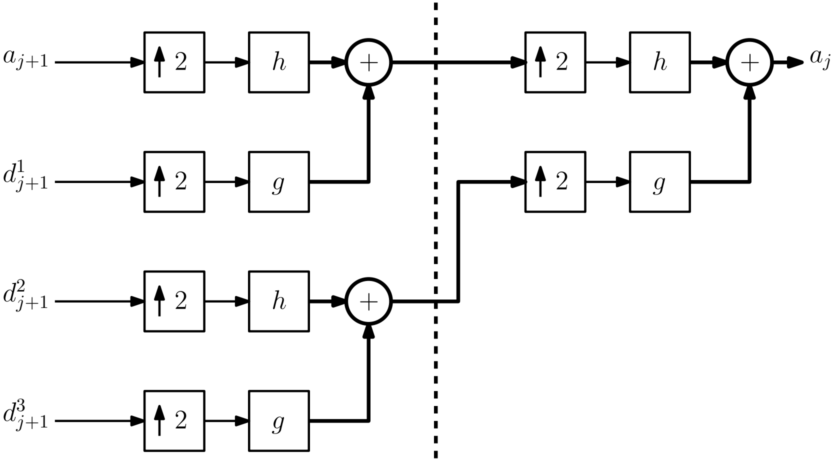
Extension en 2D : par transformées séparables

Idée : on filtre d'abord dans une direction puis dans l'autre grace aux filtres 1D.

$\Rightarrow$ Extension directe de l'algorithme de Mallat.



Extension en 2D : par transformées séparables

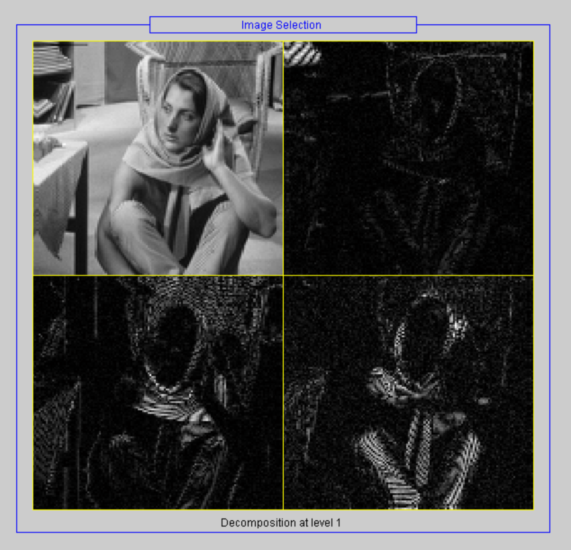


Filters applied in the vertical direction

Filters applied in the horizontal direction

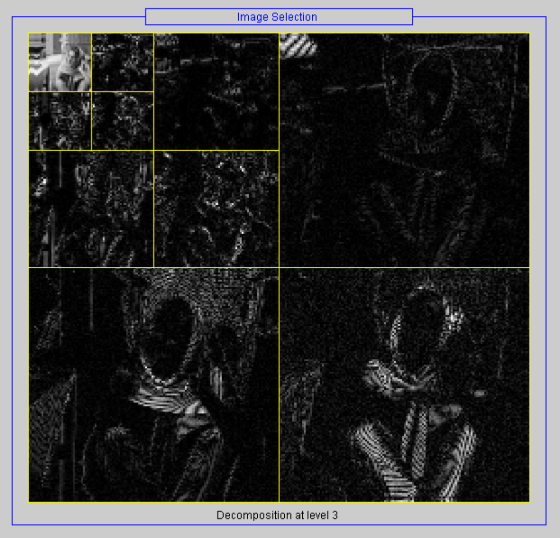
Transformée en 2D

Transformée en 2D

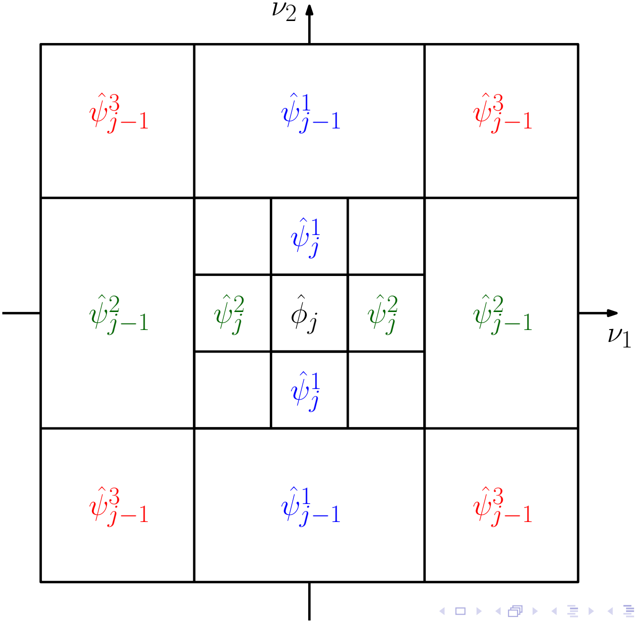


Transformée en 2D

Transformée en 2D



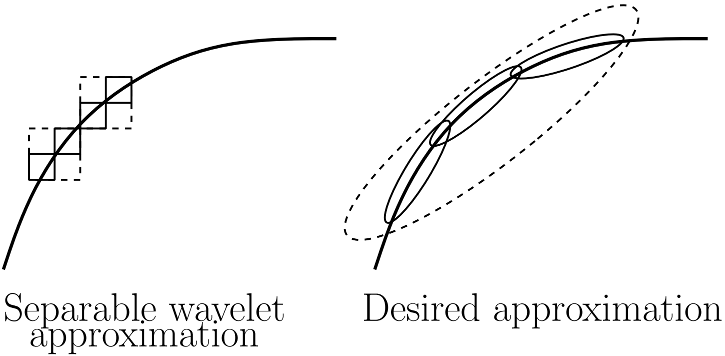
Interprétation dans le domaine de Fourier



La 2D : un monde particulier !

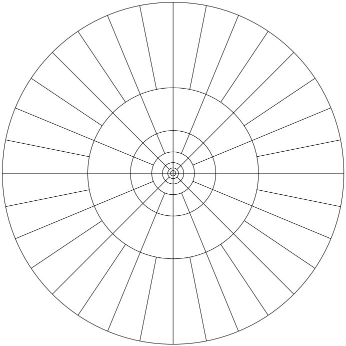
Ondelettes séparables $\Rightarrow$ analyse suivant les axes.

Dans une image l'information peut suivre n'importe quelle direction.



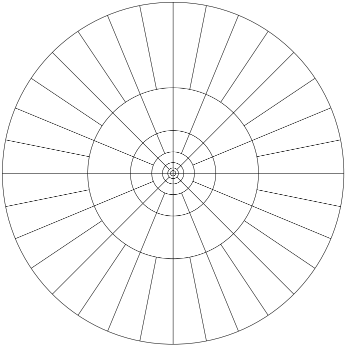
De meilleures familles . . .

On peut construire des trames adaptées à la notion de direction, voire à la géométrie même de l'image.



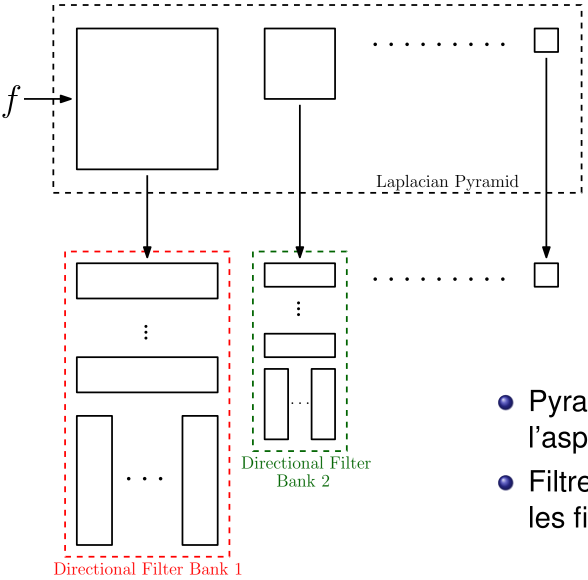
De meilleures familles . . .

On peut construire des trames adaptées à la notion de direction, voire à la géométrie même de l'image.



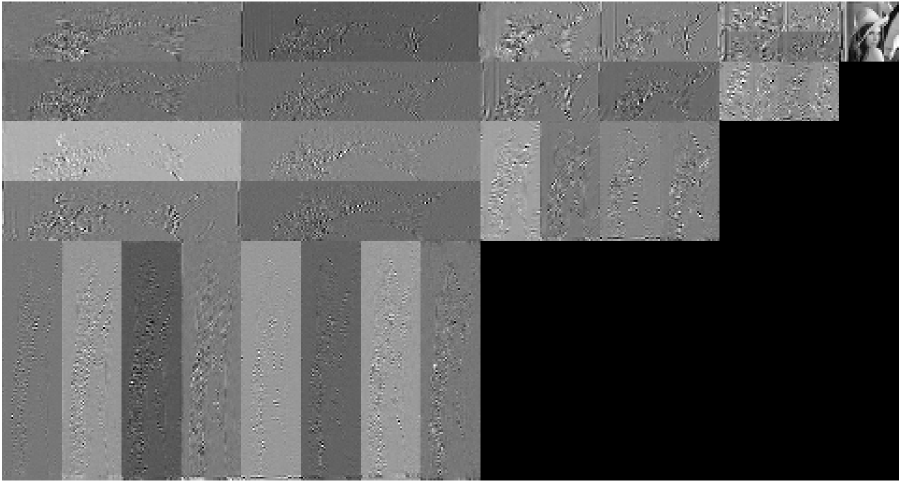
$\Rightarrow$ ridgelettes, curvelettes, contourlettes, edgelettes, bandelettes,. . .

Contourlettes



- Pyramide Laplacienne pour l'aspect multirésolution
- Filtres directionnels basés sur les filtres en quinqux

Contourlettes



Applications

- Débruitage
- Compression
- ...

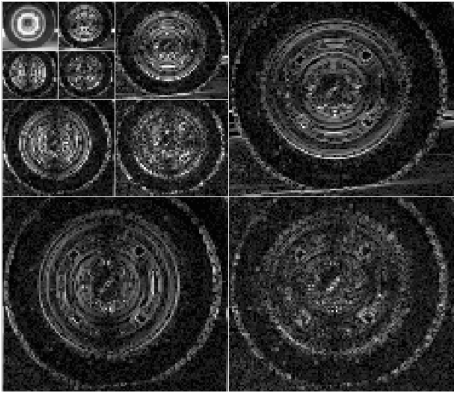
Prémisces : notion d'approximation

Chaque coefficient apporte son lot plus ou moins important d'information

Original

Prémisces : notion d'approximation

Chaque coefficient apporte son lot plus ou moins important d'information

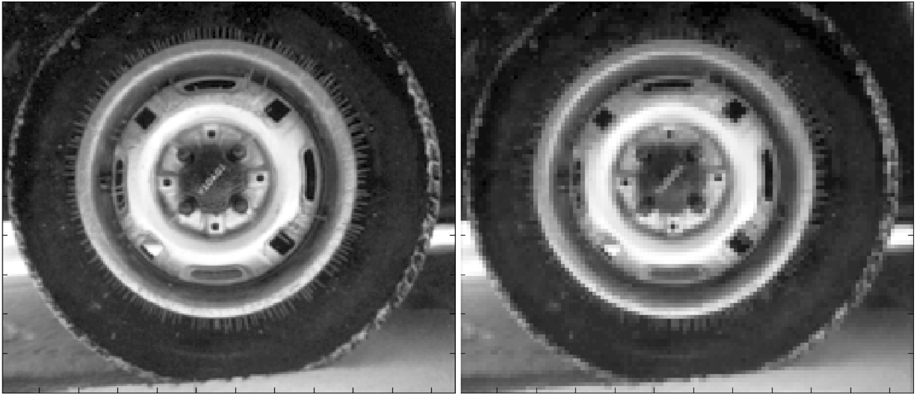


Original

Coefficients d'ondelette (Daubechies)

Prémisces : notion d'approximation

Chaque coefficient apporte son lot plus ou moins important d'information



Original Reconstruction sans la HR

Prémisces : notion d'approximation

Seuillage doux (*Soft thresholding*)

Soit un seuil T

$$HT(x,T) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leqslant T \\ sign(x)(|x| - T) & \text{si} \quad |x| > T \end{cases}$$

Seuillage dur (*Hard thresholding*)

Soit un seuil T

$$HT(x,T) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leqslant T \\ x & \text{si} \quad |x| > T \end{cases}$$

Exemple de seuillage doux

Original

$T = 50$

$T = 100$

$T = 1000$

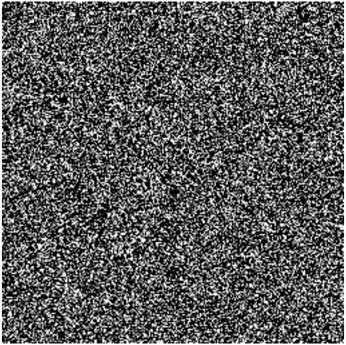
Exemple de seuillage dur

Original

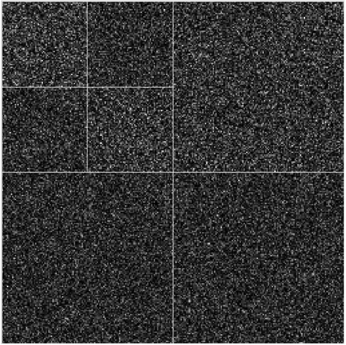
$T = 50$

$T = 100$

$T = 1000$



Bruit

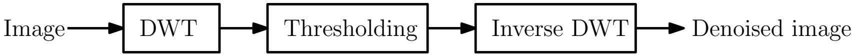


Coefficient d'ondelette du bruit

L'énergie du bruit est répartie au travers de toutes les échelles (coefficients de faibles amplitudes).

Débruitage

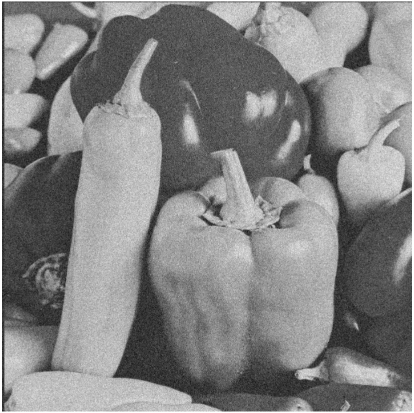
$\Rightarrow$ Utilisation du seuillage pour éliminer les coefficients dûs au bruit.



Bruit gaussien $\Rightarrow$ seuillage doux optimal en théorie mais le seuillage dur donne de meilleurs résultats visuellement.

Débruitage : exemple

Original



Version bruitée

Débruitage : exemple

Original

Seuillage doux sur coef d'ondelette

Débruitage : exemple

Original

Seuillage dur sur coef d'ondelette

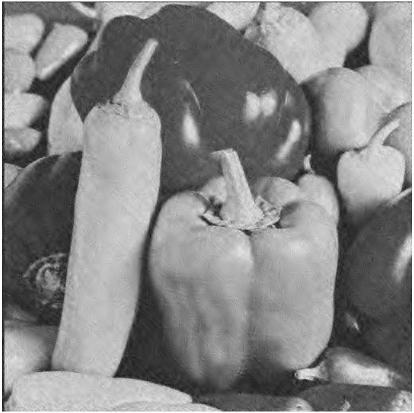
Débruitage : exemple

Original

Seuillage doux sur coef contourlette

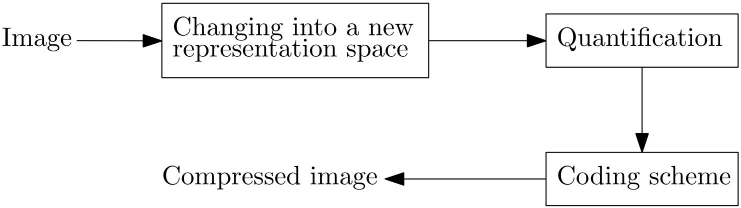
Débruitage : exemple

Original

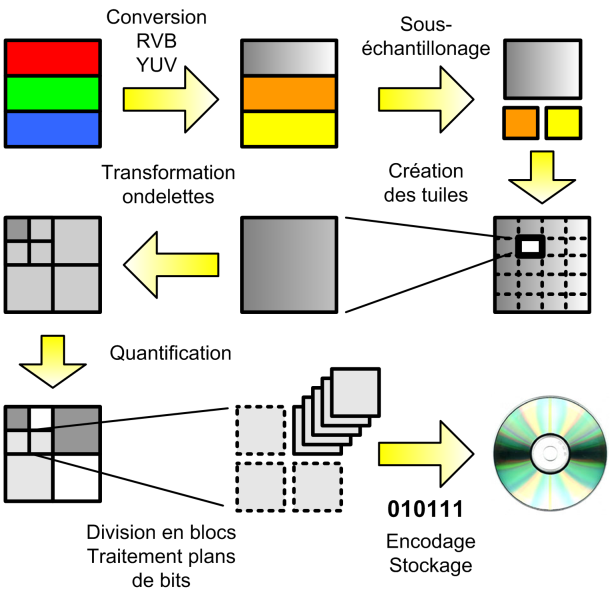


Seuillage dur sur coef contourlette

Compression : principe général



Compression : JPEG2000



Compression : JPEG2000

JPEG 1 :86

JPEG 1 :41

JPEG2000 1 :86

JPEG2000 1 :41

Du point de vue théorique

- D'autres extensions : paquets d'ondelettes, ondelettes rationnelles, . . .
- Outil pour l'analyse fonctionnelle (espace de Besov, espace de Triebel-Lizorkin), . . .
- Lien avec la théorie de l'approximation, . . .
- Outil pour la résolution des équations différentielles, . . .

Le monde merveilleux des ondelettes . . .

Du point de vue théorique

- D'autres extensions : paquets d'ondelettes, ondelettes rationnelles, . . .
- Outil pour l'analyse fonctionnelle (espace de Besov, espace de Triebel-Lizorkin), . . .
- Lien avec la théorie de l'approximation, . . .
- Outil pour la résolution des équations différentielles, . . .

Du point de vue applicatif

- Compression de vidéo (MPEG4, . . .)
- Analyse de signaux sismiques, acoustiques, . . .
- Traitement d'images : analyse de textures, modélisation, . . .
- . . .

Quelques références

- S.Mallat, “Une exploration des signaux en ondelettes”
- M.Vetterli, “Wavelets and subband coding” ($http : //infoscience.epfl.ch/record/33934/files/VetterliKovacevic95\_Manuscript.pdf?version = 1$)
- Y.Meyer, “Ondelettes et opérateurs” (3 tomes)
- Wavelet Digest : $http : //www.wavelet.org$