

LES BASES DE L'ANALYSE HARMONIQUE

Jérôme Gilles

DGA-IP/ASC/EORD
<http://jerome.gilles91.free.fr>

PREMIERE PARTIE

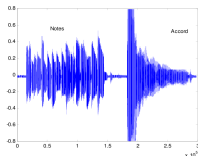
Analyse de Fourier

- Introduction - Un peu d'histoire ...
- Quelques rappels de maths.
- Les séries de Fourier.
- La transformée de Fourier continue.
- La transformée de Fourier discrète.
- Propriétés.
- Extension au 2D.

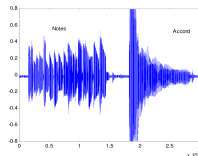
Un challenge quotidien

Traitement du signal/image : nécessité de pouvoir :

● **analyser :**



● **synthétiser :**



⇒ besoin d'éléments de référence.

La révolution Fourier !

Biographie

- Né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830
- Diplômé de l'ENS (Professeurs : Lagrange, Monge, Laplace)
- Chaire à Polytechnique en 1797
- Préfet de l'Isère en 1801
- Membre de l'académie des sciences en 1817
- Membre de l'académie française en 1826



La révolution Fourier !

Biographie

- Né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830
- Diplômé de l'ENS (Professeurs : Lagrange, Monge, Laplace)
- Chaire à Polytechnique en 1797
- Préfet de l'Isère en 1801
- Membre de l'académie des sciences en 1817
- Membre de l'académie française en 1826



Travaux scientifiques

- Théorie analytique de la chaleur : modélisation de la propagation de la chaleur par séries trigonométriques (séries de Fourier)
- Le premier à proposer l'idée d'effet de serre

Quelques rappels

Espace L^1 : espace des fonctions intégrables

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\|f\|_{L^1} = \int |f(t)| dt < \infty$

Espace L^2 : espace des fonctions d'énergie finie

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $\|f\|_{L^2} = \left(\int |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$

Produit scalaire de deux fonctions

Soit $f, g \in E$ alors $\langle f, g \rangle = \int f(t)\bar{g}(t) dt$

Si $\exists T \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t)$ alors T est appelé la période de f et $F = 1/T$ la fréquence de f .

Fonction Dirac : $\delta(t)$

$\delta(t) = +\infty$ en $t = 0$, 0 sinon et $\int \delta(t) dt = 1$.

En discret : symbole de Kronecker : $\delta[n]$

$\delta[n] = 1$ si $n = 0$, 0 sinon.

Séries de Fourier : Définition

Idée : toute fonction périodique de période T peut se décomposer comme la somme de polynômes trigonométriques $e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad \text{où} \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}$$

Séries de Fourier : Définition

Idée : toute fonction périodique de période T peut se décomposer comme la somme de polynômes trigonométriques $e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad \text{où} \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}$$

qui peut encore s'écrire si f est réelle

$$f(t) = a_0(f) + \sum_1^{+\infty} a_n(f) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + \sum_1^{+\infty} b_n(f) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

Séries de Fourier : Définition

Idée : toute fonction périodique de période T peut se décomposer comme la somme de polynômes trigonométriques $e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad \text{où} \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}$$

qui peut encore s'écrire si f est réelle

$$f(t) = a_0(f) + \sum_1^{+\infty} a_n(f) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + \sum_1^{+\infty} b_n(f) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

où $a_0(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt$, $b_0(f) = 0$ et pour $n > 0$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$$

- si f est paire alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$, si f est réelle $b_n(f) = 0$,
- si f est impaire alors $c_{-n}(f) = -c_n(f)$, si f est réelle $a_n(f) = 0$

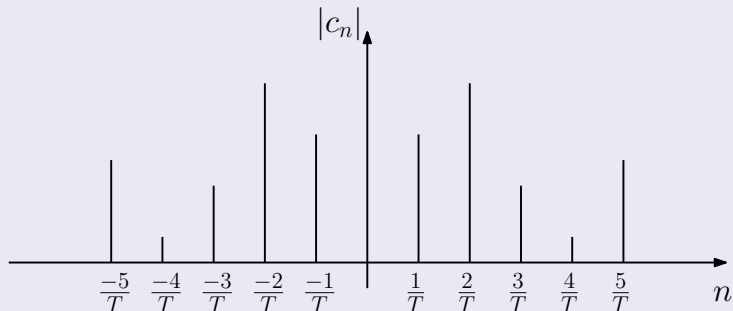
Egalité de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2}^2.$$

Séries de Fourier : Propriétés 2/3

Les fréquences des sinus/cosinus sont des multiples de $1/T$ (harmoniques).

Représentation spectrale



- On note $e_n(t) = e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$ alors

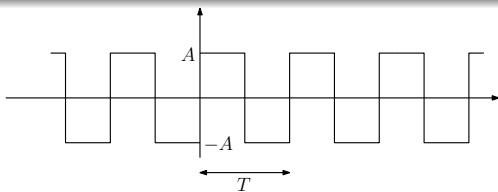
- On note $e_n(t) = e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$ alors
- $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\bar{e}_n(t)dt = \langle f, e_n \rangle$

- On note $e_n(t) = e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$ alors
- $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\bar{e}_n(t)dt = \langle f, e_n \rangle$
- Or $\{e_n\}$ est une base orthonormée ($\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$ et vaut 1 si $n = m$)

- On note $e_n(t) = e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$ alors
- $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\bar{e}_n(t)dt = \langle f, e_n \rangle$
- Or $\{e_n\}$ est une base orthonormée ($\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$ et vaut 1 si $n = m$)

\implies Décomposition en séries de Fourier = projection sur la base des sinus/cosinus.

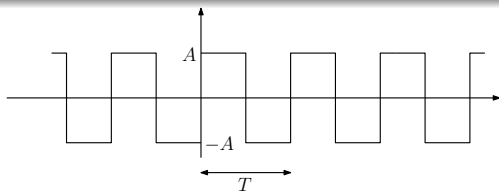
Séries de Fourier : Exemple



Signal réel impaire de
moyenne nulle

$$\implies a_n(f) = 0 \quad \forall n$$

Séries de Fourier : Exemple



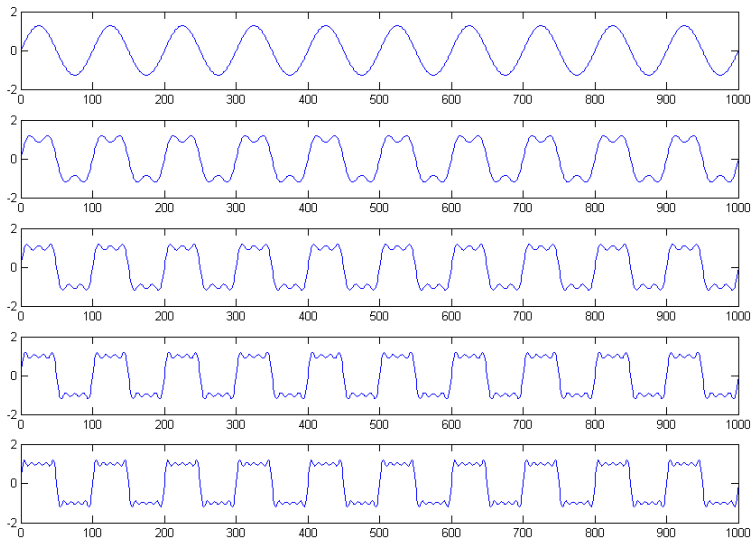
Seul les $b_n(f)$ sont non nuls :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \\ &= \frac{2A}{T} \left[- \int_{-T/2}^0 \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt + \int_0^{T/2} \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \right] \\ &= \frac{2A}{T} \left\{ \left[\frac{T}{2\pi n} \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \right]_{-T/2}^0 + \left[-\frac{T}{2\pi n} \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \right]_0^{T/2} \right\} \\ &= \frac{A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi) - \cos(n\pi) + 1) \\ &= \frac{2A}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Signal réel impaire de
moyenne nulle

$$\implies a_n(f) = 0 \quad \forall n$$

Séries de Fourier : Exemple



Transformée de Fourier continue : Définition

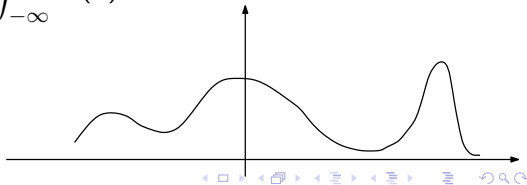
Objectif : généraliser la notion de spectre aux fonctions non périodiques (fréquence $\nu \in \mathbb{R}$).

La transformée de Fourier d'une fonction f est donnée par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

La transformée inverse est

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{+j2\pi\nu t} d\nu$$



Transformée de Fourier continue : Propriétés

	Fonction	Transformée de Fourier
Linéarité	$af_1(t) + bf_2(t)$	$a\hat{f}_1(\nu) + b\hat{f}_2(\nu)$
Contraction	$f(at)$	$\frac{1}{ a }\hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$
Translation temporelle	$f(t + t_0)$	$\hat{f}(\nu)e^{j2\pi\nu t_0}$
Modulation temporelle	$f(t)e^{j2\pi\nu_0 t}$	$\hat{f}(\nu - \nu_0)$
Convolution	$f(t) \star g(t)$	$\hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu)$
Dérivation	$f'(t)$	$j2\pi\nu\hat{f}(\nu)$

Théorème de Parseval-Plancherel

Conservation du produit scalaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)\bar{\hat{g}}(\nu)d\nu$$

En particulier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$$

Transformée de Fourier continue : “Quelques classiques”

	Fonction	Transformée de Fourier
constante	A	$A\delta(\nu)$
Dirac	$\delta(t)$	1
fonction trigonométrique	$\cos(2\pi\nu_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$
fonction signe	$\text{Signe}(t)$	$\frac{1}{j\pi\nu}$
échelon unité	$u(t)$	$\frac{1}{j\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)$
fonction porte	1 si $-T/2 \leq t \leq T/2$, 0 sinon	$T\text{sinc}(\pi\nu T)$
peigne de Dirac	$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\nu_0)$
gaussienne	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-4\pi^2\sigma^2\nu^2}$

Transformée de Fourier discrète : Définition

On suppose que l'on a échantillonné sur N points le signal $f(t)$ à la fréquence F_e , $f(nT_e)$ (on notera aussi directement $f(n)$).

Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

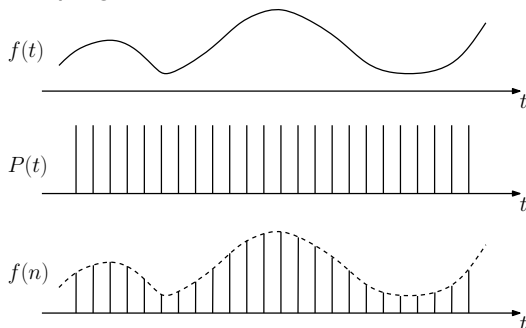
$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Transformée inverse :

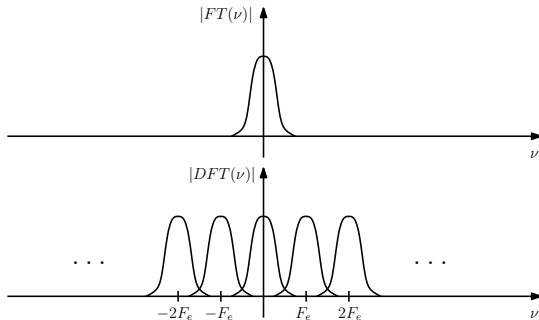
$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Algorithme rapide : FFT

Dire que $f(t)$ est échantillonné est équivalent à $f(n) = f(t)P(t)$
où $P(t)$ est le peigne de Dirac associé à T_e .



Or la TF d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac et que le produit en temporel devient un produit de convolution dans Fourier \implies duplication du spectre du signal d'entrée.



Condition de Shannon pour une reconstruction correcte du signal d'origine : le support de la TF de f doit être limité à la plage fréquentielle $]-F_e/2; F_e/2[$ pour éviter le **recouvrement de spectre**.

Lien entre TF et TFD 3/3

Effet de la troncature : N échantillons \Leftrightarrow pondérer le signal $f(t)$ par une fonction porte.

$$f'(t) = f(t)\Pi(t) \quad \text{où} \quad \Pi(t) = 1 \quad \text{si } t \in [0, NT_e], 0 \text{ sinon}$$

\Rightarrow convolution dans le domaine spectral par un sinc ! On déforme le spectre !

Exemple : $f(t) = \sin(2\pi\nu t)$ ($\nu = 30$ Hz)

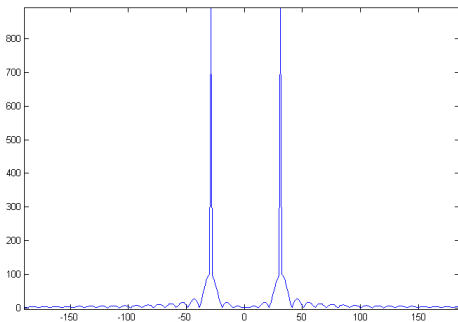
Lien entre TF et TFD 3/3

Effet de la troncature : N échantillons \Leftrightarrow pondérer le signal $f(t)$ par une fonction porte.

$$f'(t) = f(t)\Pi(t) \quad \text{où} \quad \Pi(t) = 1 \quad \text{si } t \in [0, NT_e], 0 \text{ sinon}$$

\Rightarrow convolution dans le domaine spectral par un sinc ! On déforme le spectre !

Exemple : $f(t) = \sin(2\pi\nu t)$ ($\nu = 30$ Hz)



Pondération par des fenêtres 1/2

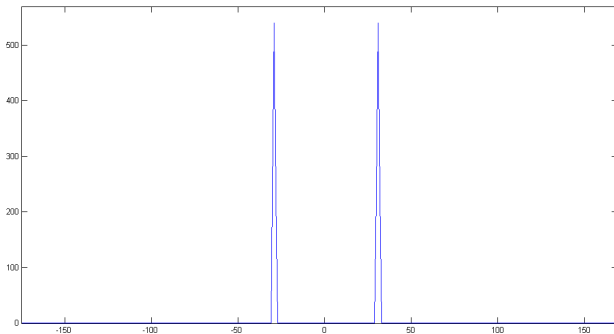
Pour atténuer la déformation du spectre, on peut utiliser des fenêtres de pondération $w(t)$ différentes d'une fonction porte et présentant de meilleurs comportements spectraux. Alors $f'(t) = w(t)f(t)$

⇒ fenêtres triangulaires, parabolique, Hanning, Hamming, Blackman-Harris, Gauss, Chebychev, ...

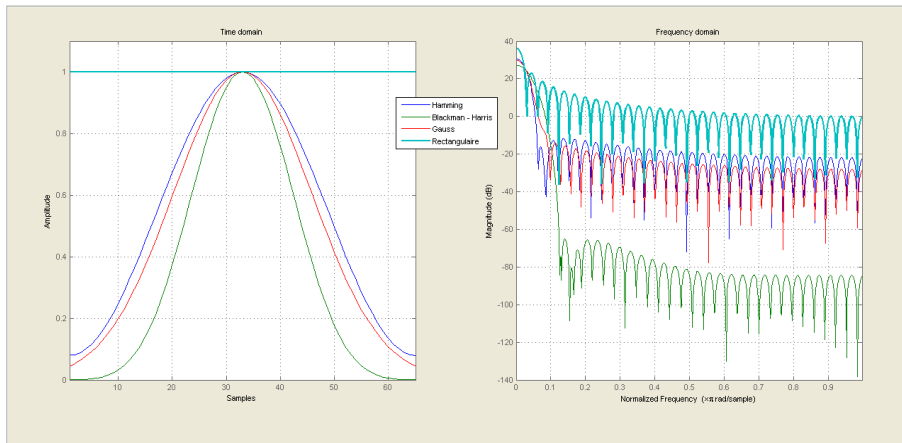
Pondération par des fenêtres 1/2

Pour atténuer la déformation du spectre, on peut utiliser des fenêtres de pondération $w(t)$ différentes d'une fonction porte et présentant de meilleurs comportements spectraux. Alors $f'(t) = w(t)f(t)$

⇒ fenêtres triangulaires, parabolique, Hanning, Hamming, Blackman-Harris, Gauss, Chebychev, ...



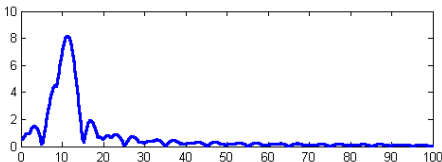
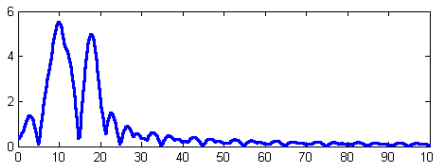
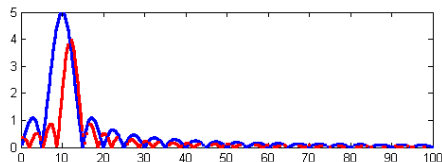
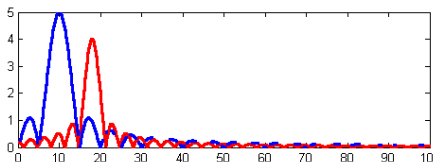
Pondération par des fenêtres 2/2



Pouvoir de résolution 1/2

Dans le cas pondération par une porte, le lobe principal du sinc dans Fourier a une largeur totale de $2/N$ et les lobes secondaires $1/N$.

Problème quand deux raies sont trop proches : on ne peut plus les distinguer ou les **résoudre** :



Pour pouvoir résoudre deux fréquences, il faut que l'écart entre elles soit supérieur à la résolution de Fourier :

$$|\nu_1 - \nu_2| > \frac{1}{N}$$

(Rq : pour certains déphasages, cette condition n'est pas nécessaire)

Sinon, on peut aussi utiliser la technique du “bourrage de zéros” (augmentation artificielle du nombre d'échantillons N en insérant des zéros entre les échantillons du signal, on montre que cela ne change rien à l'aspect du spectre).

Comportement de "localisation"

- Signaux bien localisés temporellement \implies larges dans le domaine fréquentiel.
- Signaux large dans le domaine temporel \implies bien localisés en fréquentiel.

Ex : $\delta(t - t_0) \implies e^{j2\pi\nu t_0}$ (support infini en fréquence)

Distribution statistique de l'information

Les quantités $\frac{|f(t)|^2}{E_f}$ et $\frac{|\hat{f}(\nu)|^2}{E_f}$ avec E_f l'énergie du signal donné par le théorème de Parseval, peuvent être interprétées comme les densités de probabilité de la répartition de l'information dans un domaine ou l'autre. On peut donc calculer les moments de ces densités.

Temps et fréquence moyennes

$$\bar{t} = \frac{1}{E_f} \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad \bar{\nu} = \frac{1}{E_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$$

Variances temporelles et fréquentielles

$$(\Delta t)^2 = \frac{1}{E_f} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^2 |f(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad (\Delta \nu)^2 = \frac{1}{E_f} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu - \bar{\nu})^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$$

- $\Delta \nu$ et Δt sont invariant par translation en t et ν .
- Le produit $\Delta t \Delta \nu$ est invariant par contraction/dilatation temporelle ou fréquentielle.

Principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg

On montre que :

$$\Delta t \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

Les signaux conjointement les plus compacts dans les deux domaines sont les signaux gaussiens.

Extension au 2D : le cas continu

Tous les principes exposés sont directement extensibles au cas 2D, pour une fonction $f(x_1, x_2)$:

TF continue :

$$\hat{f}(\nu_1, \nu_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-j2\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

TF continue inverse :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu_1, \nu_2) e^{+j2\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} d\nu_1 d\nu_2$$

Extension au 2D : le cas discret

Les images $f(i, j)$ sont supposées de taille $N \times M$

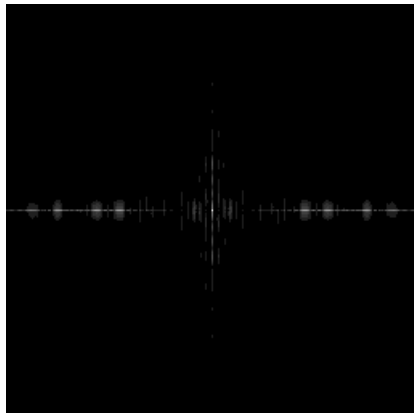
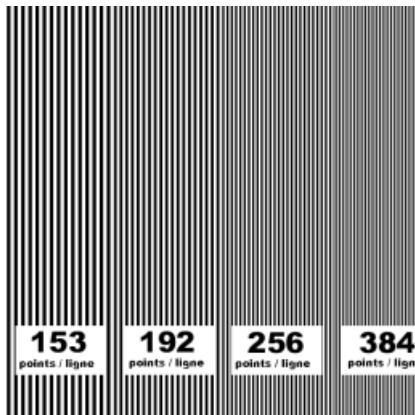
TFD :

$$F(k, l) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(i, j) e^{-j2\pi\left(\frac{ki}{N} + \frac{lj}{M}\right)}$$

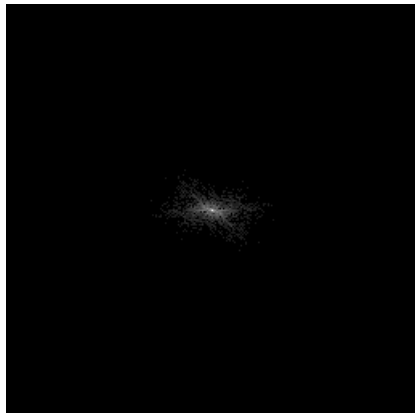
TFD inverse :

$$f(i, j) = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} F(k, l) e^{j2\pi\left(\frac{ki}{N} + \frac{lj}{M}\right)}$$

Extension au 2D : Mire à barres



Extension au 2D : Lena



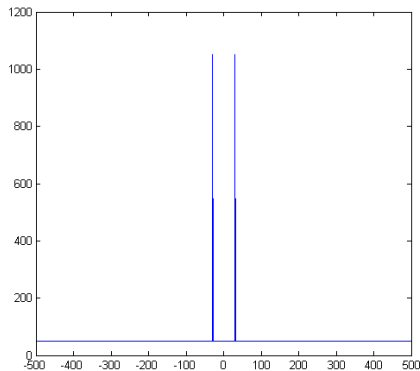
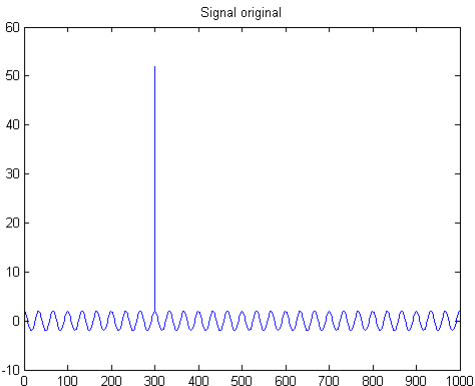
DEUXIEME PARTIE

Analyse temps-fréquence

- L'analyse temps-fréquence
- Transformée de Fourier à fenêtre glissante
- Limitations

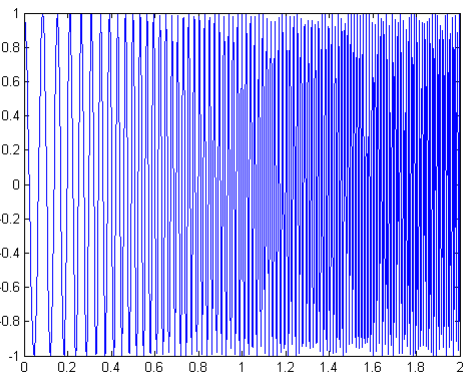
Limitation de la transformée de Fourier

La TF n'a pas de notion de "localisation" : on ne sait pas à quel instant une composante spectrale est apparue.

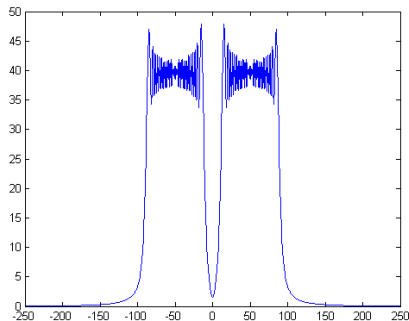


sinusoïde (30 Hz) + Dirac
($t = 0.3s$)

Cas du Chirp linéaire

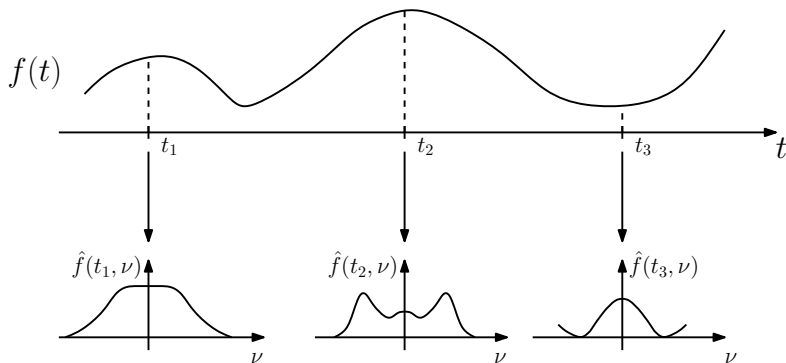


Chirp de 10Hz à 100Hz sur 2s



Transformée de Fourier locale

Idée : “avoir un spectre par instant t : **analyse temps-fréquence**”



Or la TF se calcule sur \mathbb{R} : $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t} dt \Rightarrow$ non local.

Transformée de Fourier à fenêtre glissante

On obtient la “localité” en considérant que seule une portion du signal “proche” de l’instant considéré contribue au contenu fréquentiel.

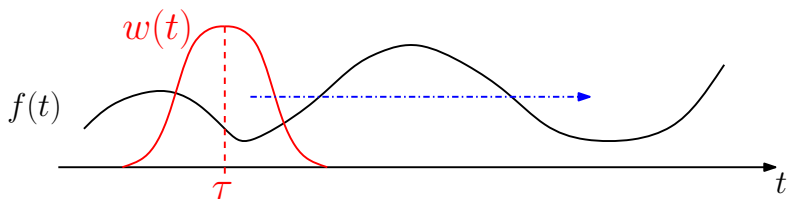
⇒ fenêtrage du signal.

Transformée de Fourier à fenêtre glissante

On obtient la “localité” en considérant que seule une portion du signal “proche” de l’instant considéré contribue au contenu fréquentiel.

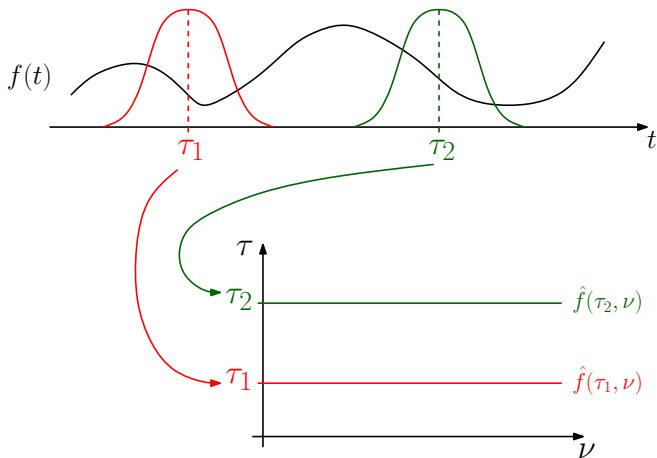
⇒ fenêtrage du signal.

La fenêtre sera centrée à l’instant τ et on va faire “glisser” la fenêtre en jouant sur τ .



Plan temps-fréquence

On obtient une représentation en 2D (axe temporel + axe fréquentiel) appelée "le plan temps-fréquence" ou spectrogramme



La transformée de Fourier à fenêtre glissante (ou transformée de Fourier à court terme - TFCT) s'écrit

$$S_f(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \tau) f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

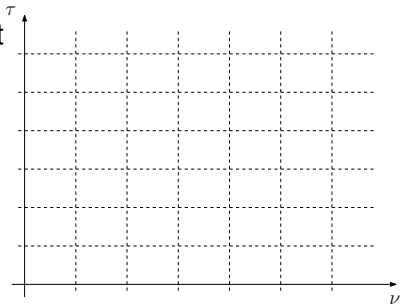
et on a

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\nu, \tau) w(t - \tau) e^{j2\pi\nu t} d\tau d\nu$$

où $w(t)$ peut être l'une des fenêtres vues précédemment.

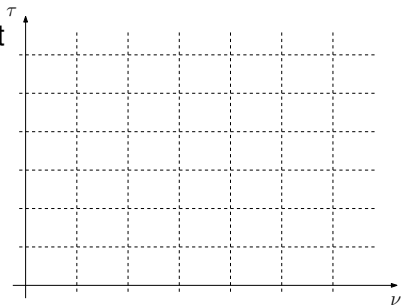
Propriété importante du plan temps-fréquence

- Grille échantillonnée en temps et fréquence



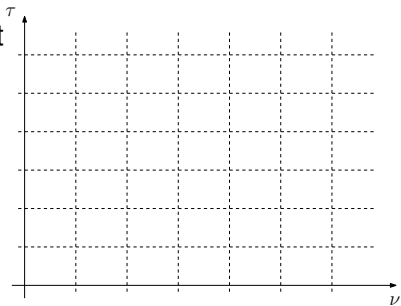
Propriété importante du plan temps-fréquence

- Grille échantillonnée en temps et fréquence
- Gabor-Heisenberg (cas optimal, fenêtre gaussienne)
 $\Rightarrow \Delta t \Delta \nu = cst.$



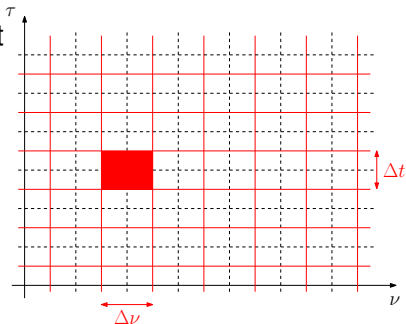
Propriété importante du plan temps-fréquence

- Grille échantillonnée en temps et fréquence
- Gabor-Heisenberg (cas optimal, fenêtre gaussienne)
 $\Rightarrow \Delta t \Delta \nu = cst.$
- $\Delta t, \Delta \nu$ fixés par $w(t)$.



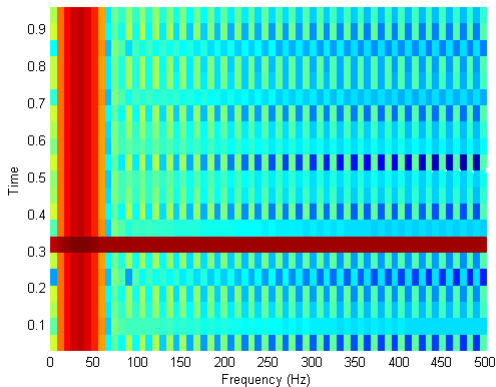
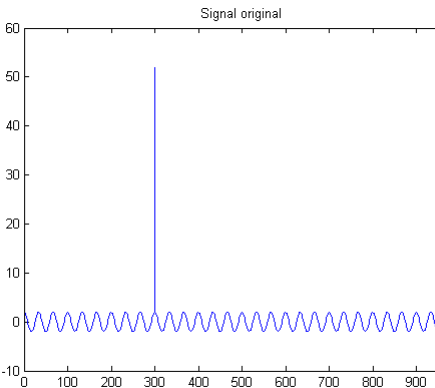
Propriété importante du plan temps-fréquence

- Grille échantillonnée en temps et fréquence
- Gabor-Heisenberg (cas optimal, fenêtre gaussienne)
 $\Rightarrow \Delta t \Delta \nu = cst.$
- Δt , $\Delta \nu$ fixés par $w(t)$.
- \Rightarrow pavage de plan temps-fréquence



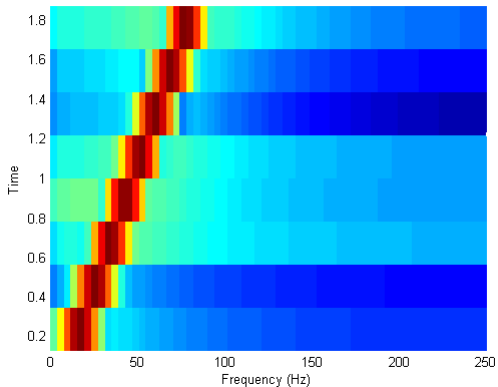
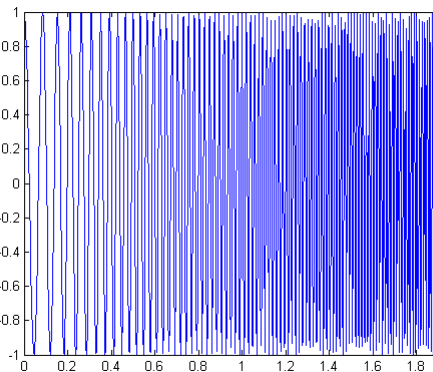
Cas sinus + Dirac

sinusoïde (30 Hz) + Dirac
($t = 0.3s$)

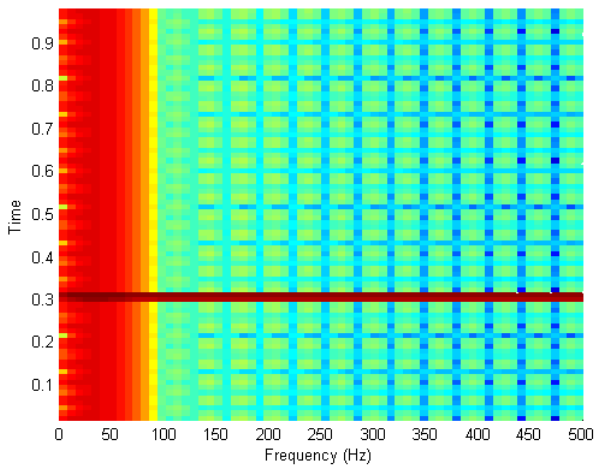


Cas du Chirp linéaire

Chirp de 10Hz à 100Hz sur 2s



Influence de la taille de la fenêtre 1/2

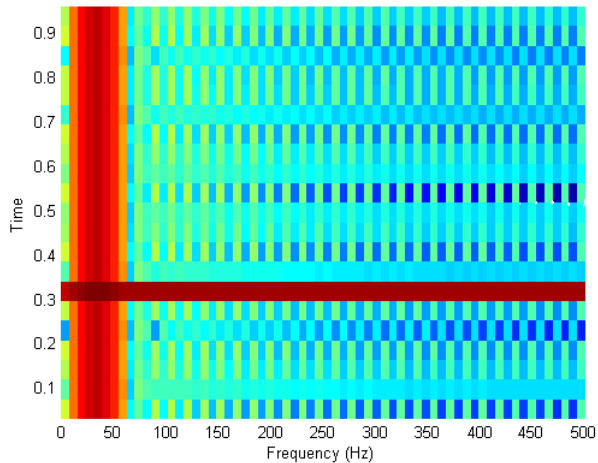


$L=32$

Bonne loc temporelle

Mauvaise loc fréquentielle

Influence de la taille de la fenêtre 1/2

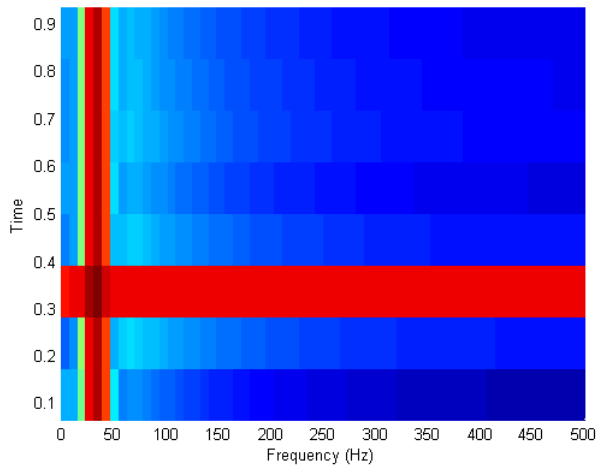


L=64

Moyenne loc temporelle

Moyenne loc fréquentielle

Influence de la taille de la fenêtre 1/2

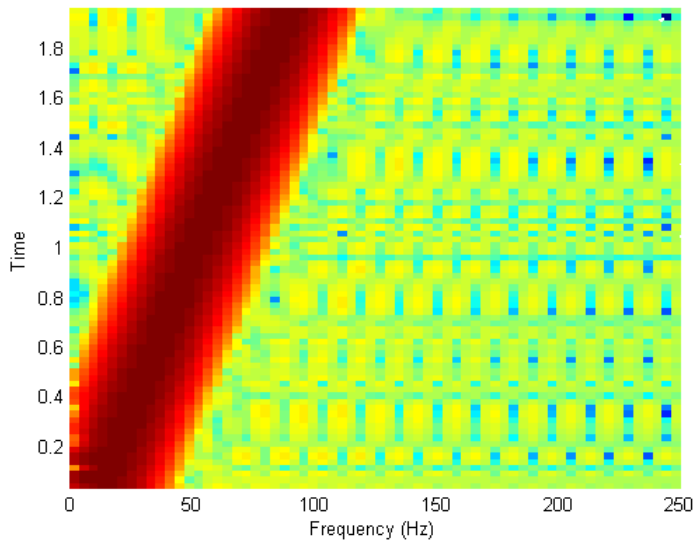


L=128

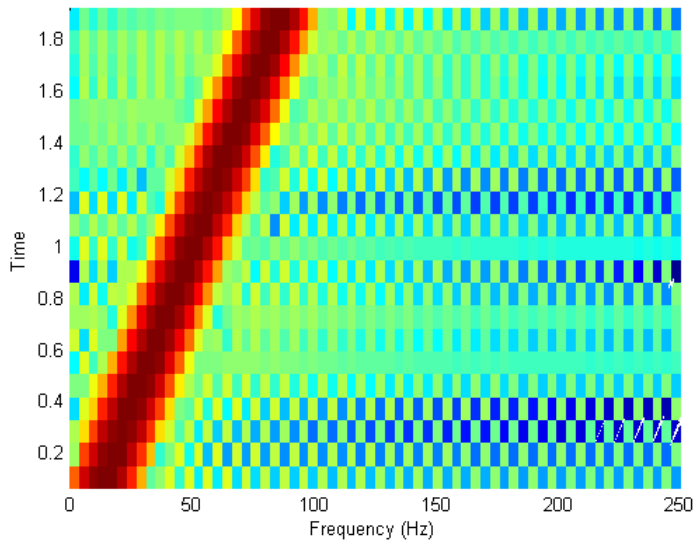
Mauvaise loc temporelle

Bonne loc fréquentielle

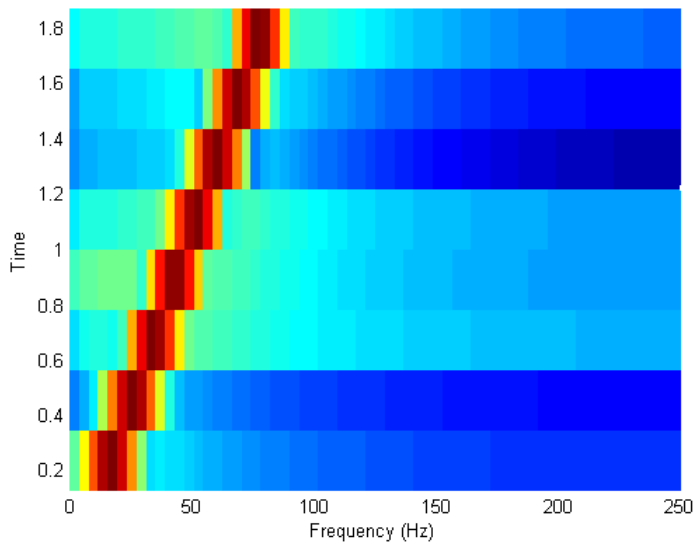
Influence de la taille de la fenêtre 2/2



Influence de la taille de la fenêtre 2/2



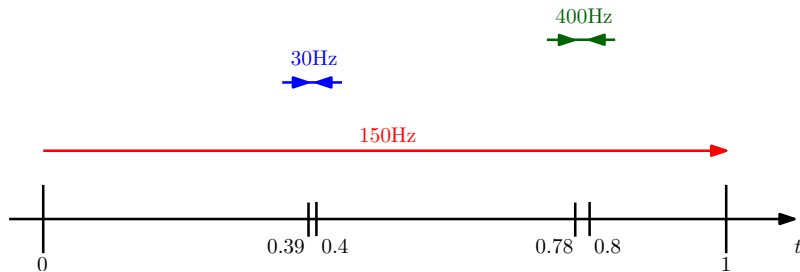
Influence de la taille de la fenêtre 2/2



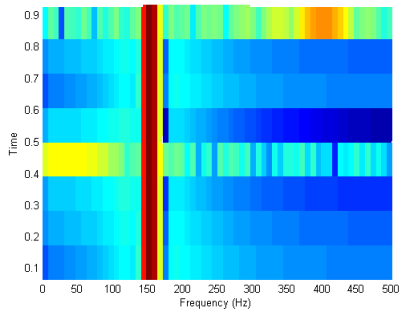
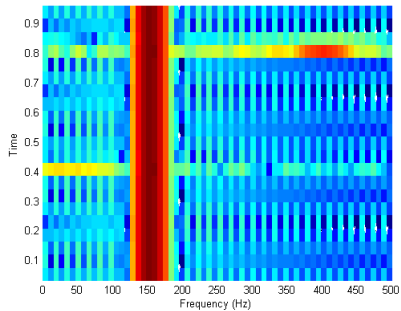
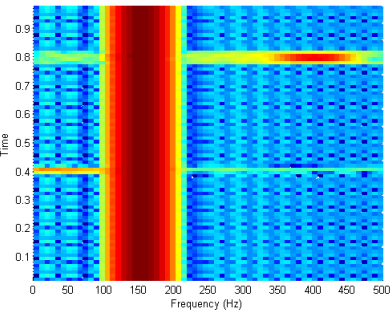
Les limites de la TFCT 1/3

Suivant le contenu fréquentiel on peut avoir besoin de différentes résolutions. Par exemple, supposons le signal suivant :

$$f(t) = \begin{cases} 2 \cos(2\pi 150t) & \text{si } t \in [0; 0.39\text{s}] \cup [0.4\text{s}; 0.78\text{s}] \cup [0.8\text{s}; 1\text{s}] \\ 2 \cos(2\pi 150t) + 0.5 \cos(2\pi 30t) & \text{si } t \in [0.39\text{s}; 0.4\text{s}] \\ 2 \cos(2\pi 150t) + \cos(2\pi 400t) & \text{si } t \in [0.78\text{s}; 0.8\text{s}] \end{cases}$$



Les limites de la TFCT 2/3



Quand différentes composantes fréquentielles sont présentes dans le signal, il est meilleur d'avoir une TFCT avec une fenêtre courte pour analyser les hautes fréquences et une fenêtre large pour analyser les basses fréquences. Ce qui est impossible car on a un pavage uniforme du plan temps-fréquence !

⇒ Utilisation des ondelettes : analyse multirésolution.