Modélisation d'images par espace BV et espaces de fonctions oscillantes

Jérôme Gilles

DGA-IP/ASC/EORD, CMLA/ENS Cachan

gilles.research@free.fr

http://jerome.gilles91.free.fr

Introduction

De nombreuses applications nécessitent l'analyse des textures.
Défense $\rightarrow$ différents types d'imagerie $\rightarrow$ différents types de textures

Introduction

De nombreuses applications nécessitent l'analyse des textures.
Défense → différents types d'imagerie → différents types de textures

Introduction

De nombreuses applications nécessitent l'analyse des textures.
Défense $\longrightarrow$ différents types d'imagerie $\longrightarrow$ différents types de textures

Introduction

Introduction


346:09:10:29:941
346:09:10:29:905

Introduction

- Difficulté de donner une définition unique de la texture,
- De nombreux points de vue:
  - Approches fréquentielles,
  - Approches statistiques,
  - Notion de “texton”,
  - Approches analyse fonctionnelle

$\rightarrow$ point de vue de l’analyse fonctionnelle, les textures étant modélisées comme des fonctions oscillantes.

Quels espaces de fonctions choisir? Comment décrit-on un modèle de texture?

Préambules

Soit une image f définie sur $\mathbb{R}^n$ ou $\Omega = [0;1]^n$ (puis périodisation de f).

Soit $X(\mathbb{R}^n)$ ou $X(\Omega)$ des espaces de fonctions.

<u>But</u>: modéliser $f = u + v$ où

- u sera la composante régulière ou "géometrique" (objets,...),
- v la composante "oscillante" (textures ou bruit)

Préambules

On cherche $f \in X_1 + X_2$ tel que $f = u + v$ avec $u \in X_1$ et $v \in X_2$.

La décomposition étant obtenue par le problème de minimisation suivant:

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{(u,v) \in X_1 \times X_2} \{F_1(u) + \lambda F_2(v), f = u + v\}$$

où $F_1, F_2 > 0$ et X_1, X_2 sont des espaces de fonctions ou distributions

tels que $F_1(u) < \infty$ et $F_2(v) < \infty$ ssi $(u, v) \in X_1 \times X_2$.

Préambules

Comment choisir les espaces X_1 et X_2?

Une bonne idée est de prendre X_1, X_2 tels que

- $F_1(u) \ll F_2(u)$
- $F_2(v) \ll F_1(v)$

Le point de départ: Rudin-Osher-Fatemi (ROF)

But initial: débruitage, restauration

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{(u,v) \in BV \times L^2} \{J(u) + \lambda \|v\|_{L^2}^2, f = u + v\}$$

où $J(u) = |u|_{BV} = \int |Du|$ (semi-norme sur BV l'espace des fonctions à variations bornées).

$\Rightarrow$ pas adapté pour capturer correctement les fonctions oscillantes.

ROF: propriétés

Soit la fonction $g_N(x) = \chi(x)\cos(Nx_1)$ où $\chi(x)$ est la fonction indicatrice sur un domaine fini, N la fréquence et x_1 une direction dans l'image. Alors:

$$\|g_N\|_{L^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\|\chi\|_{L^2}$$
$$J(g_N) = \frac{2N}{\pi}\|\chi\|_{L^1} + \epsilon_N$$

La composante v ne dépend pas de N, elle se comporte de la même façon quelque soit la texture.

ROF: propriétés

Autres défauts:

- Le modèle n'a aucun sens dans le cas continu si l'on a la présence de bruit blanc gaussien car la norme L^2 est infinie ($\Rightarrow$ utilisation d'espaces à indices de régularité < 0),
- Phénomène de "perte d'intensité": si $f = \alpha\chi_D$ alors $\forall R \geqslant \frac{1}{\lambda\alpha}$ (R le rayon du disque D) on a

$$u = \left(\alpha - \frac{1}{\lambda R}\right)\chi_D$$

$$v = \frac{1}{\lambda R}\chi_D$$

Pb "général": si $q > 1, \forall p \geqslant 1$ alors $J(u) + \lambda\|f - u\|_{L^p}^q$ a ce défaut.

L'approche de Meyer

Idée: prendre des normes plus faibles de fonctions généralisées pour modéliser v.

Trois espaces retenus par Meyer:

- $E = \dot{B}^{\infty}_{-1,\infty}$,
- $F = \mathrm{div}\,(BMO \times BMO)$,
- $G = \mathrm{div}\,(L^{\infty} \times L^{\infty})$

Autre candidat: $W^{s,p}$ avec $s < 2$.

Les espaces E et F

- $E = \dot{B}^{\infty}_{-1,\infty}$: espace de Besov $\rightarrow$ Travaux de A.Haddad, Y.Meyer.

- $F = \mathrm{div}\,(BMO \times BMO)$: $v \in F$ si $\exists g = (g_1, g_2) \in BMO \times BMO$ tel que $v = \mathrm{div}\, g$ et

$$\|v\|_F = \inf_g \{\|g_1\|_{BMO} + \|g_2\|_{BMO}\}$$

où BMO (Bounded Mean Oscillation) sont les espaces John et Nirenberg avec

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| dx \quad \text{où} \quad f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$$

$\rightarrow$ Travaux de J.B.Garnett, P.Jones, T.M.Le, L.Vese (utilisation de $W^{s,p}$, $\dot{B}^{s}_{p,\infty}$ avec $s < 0$)

L'espace G

Quelques rappels sur BV:

$$J(u) = \sup \left\{ - \int_\Omega u \mathrm{div}\, \phi dx : \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), |\phi| \leqslant 1 \ \forall x \in \Omega \right\}$$

et la norme associée à BV est $\|.\|_{BV} = \|.\|_{L^1} + J(.)$.
Rigoureusement, le dual de BV n'est pas un espace fonctionnel mais si l'on note $\mathcal{BV}$ la fermeture de BV dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, alors $\mathcal{BV}$ a un dual noté G.

Soit $v \in G$, alors $\exists g = (g_1, g_2) \in L^\infty \times L^\infty$ tel que $v = \mathrm{div}\, g$ et

$$\|v\|_G = \inf_g \left\| \left(|g_1|^2 + |g_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty}.$$

L'espace G

BV et *G* ne sont pas directement duaux mais ont des "comportements duaux" (*BV* pour les structures et *G* pour ce qui oscille).

En effet, pour $g_N(x) = \chi(x)\cos(Nx_1)$, on vérifie que

$$\|g_N\|_G \leqslant \frac{C}{N}$$

Le modèle

La fonctionnelle proposée par Meyer est donc

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{(u,v)\in BV\times G} \{J(u) + \lambda\|v\|_G, f = u + v\}$$

Problème: impossible de faire de calcul variationnel à cause de la norme $\|.\|_{L^\infty}$ présente dans la définition de la norme $\|.\|_G$.

En pratique: L'approche de Osher et Vese

Propriété: $\forall f \in L^\infty$, $\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$.

$$(\hat{u}, \hat{g}) = \inf_{(u,g)\in BV\times(L^\infty\times L^\infty)} \left\{ J(u) + \lambda\|f - (u + \operatorname{div}\ g)\|_{L^2}^2 + \mu \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^p} \right\}$$

Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} u = f - \partial_x g_1 - \partial_y g_2 + \frac{1}{\lambda}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \\ \mu \left(\left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^p} \right)^{1-p} \left(\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right)^{p-2} g_1 = 2\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x}(u - f) + \partial_{xx}^2 g_1 + \partial_{xy}^2 g_2 \right] \\ \mu \left(\left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_{L^p} \right)^{1-p} \left(\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right)^{p-2} g_2 = 2\lambda \left[\frac{\partial}{\partial y}(u - f) + \partial_{xy}^2 g_1 + \partial_{yy}^2 g_2 \right] \end{cases}$$

$\rightarrow$ Problèmes d'instabilités numériques + hypothèse ($p \rightarrow \infty$) non respectée.

En pratique: L'approche d'Aujol

- cadre discret: $X = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $Y = X \times X$ équipés de produits scalaires et normes euclidiens,
- $\rightarrow G = \{v \in X / \exists g \in Y, v = \operatorname{div} g\}$,
- les textures sont un minimum oscillantes $\rightarrow \exists \mu > 0$ tel que $\|v\|_G \leqslant \mu$

On définit alors

$$G_\mu = \{v \in X / \|v\|_G \leqslant \mu\}$$

et la fonction indicatrice associée:

$$J^\star(v) = \chi_{G_1}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v \in G_1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété: $J^\star$ est l'opérateur dual de J ($J^{\star\star} = J$).

En pratique: L'approche d'Aujol

La fonctionnelle à minimiser est alors:

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{(u,v) \in BV \times G_\mu} \left\{ J(u) + J^* \left(\frac{v}{\mu} \right) + (2\lambda)^{-1} \|f - u - v\|_{L^2}^2 \right\}$$

$\Longrightarrow$ Utilisation des projecteurs non-linéaires de Chambolle:

v fixé	$\hat{u} = f - v - P_{G_\lambda}(f - v)$
u fixé	$\hat{v} = P_{G_\mu}(f - u)$

Les projecteurs de Chambolle

Il facile de voir que $w = P_{G_1}\left(\frac{g}{\lambda}\right)$ (l'opérateur de projection sur G_1) est un minimiseur de

$$\frac{\left\|w - \left(\frac{g}{\lambda}\right)\right\|^2}{2} + \frac{1}{\lambda} J^\star(w)$$

et que $u = g - P_{G_\lambda}\left(\frac{g}{\lambda}\right)$ est un minimiseur de

$$\frac{\|u-g\|^2}{2\lambda} + J(u)$$

où le projecteur est donné par le résultat suivant:

Théorème

Si $\tau < \frac{1}{8}$ alors $\lambda \operatorname{div}(p^n)$ converge vers $P_{G_\lambda}(g)$ quand $n \to +\infty$ où

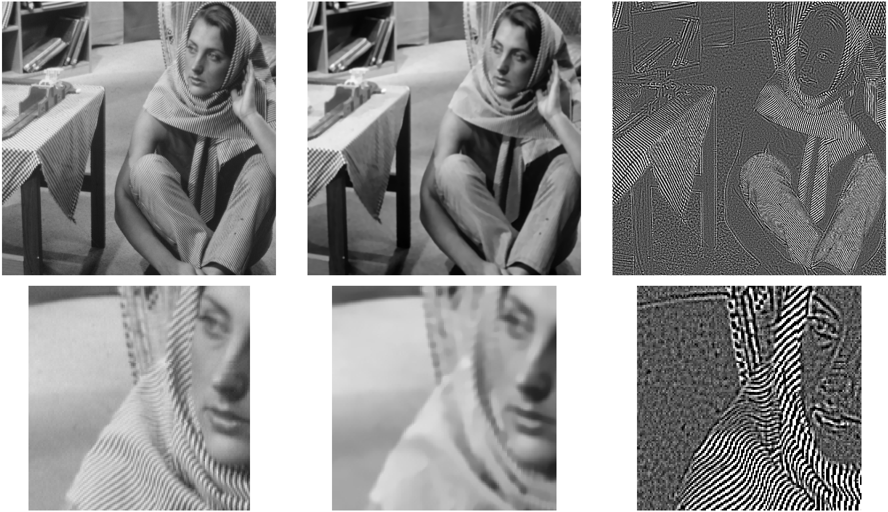
$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau\left(\nabla\left(\operatorname{div}(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j}}{1 + \tau\left|\left(\nabla\left(\operatorname{div}(p^n) - \frac{g}{\lambda}\right)\right)_{i,j}\right|}$$

Algorithme numérique

1. Initialisation:
$$u_0 = v_0 = 0$$
2. Itérations:
$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n)$$
$$u_{n+1} = f - v_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1})$$
3. On arrête l'algorithme si
$$\max\left(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|\right) \leqslant \epsilon$$

ou si l'on atteint un nombre maximal d'itérations prescrit.

Exemple



Sur le choix des paramètres . . .

Le choix de λ et μ n'est a priori pas trivial.

Aujol et al. ont proposé une méthode permettant de trouver λ et μ:

- λ fixé petit,
- $\mu = \lambda^* = \arg_\lambda \min(corr(u_\lambda^{ROF}, v_\lambda^{ROF}))$

Comportement du modèle

$$\|u\|_{BV} + \lambda\|v\|_{L^2}^2 + \mu\|w\|_G \qquad \text{où} \quad f = u + v + w$$

Theorem (J.Gilles et Y.Meyer à paraître dans IEEE Trans.Image Processing)

Si $\|f\|_G \leqslant \frac{1}{2\lambda}$ et $\|f\|_{BV} \leqslant \frac{\mu}{2\lambda}$, alors $u = w = 0$ et la décomposition optimale est $f = 0 + f + 0$.
Si $\|f\|_G \leqslant \frac{1}{2\lambda}$ mais que $\|f\|_{BV} > \frac{\mu}{2\lambda}$, alors trois cas sont possibles pour la décomposition optimale $f = u + v + w$.

1. $u = 0$, $\|v\|_{BV} = \frac{\mu}{2\lambda}$, $\|v\|_G < \frac{1}{2\lambda}$ *et* $\langle v, w\rangle = \frac{\mu}{2\lambda}\|w\|_G$,
2. $w = 0$, $\|v\|_{BV} \leqslant \frac{\mu}{2\lambda}$, $\|v\|_G = \frac{1}{2\lambda}$ *et* $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\lambda}\|u\|_{BV}$ *et finalement,*
3. $\|v\|_{BV} = \frac{\mu}{2\lambda}$, $\|v\|_G = \frac{1}{2\lambda}$, $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\lambda}\|u\|_{BV}$ *et* $\langle v, w\rangle = \frac{\mu}{2\lambda}\|w\|_G$.

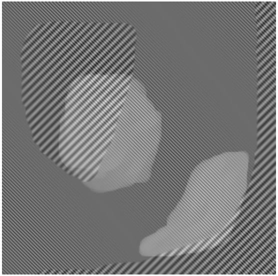
A l'inverse, tout triplet (u, v, w) qui vérifie (1), ou (2), ou (3) est optimal pour $f = u + v + w$ et leur valeurs correspondantes de λ and μ.

Theorem

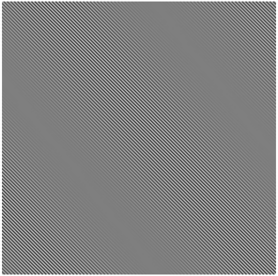
Si $f(x) = a(x) + b(x)\cos(\omega_1 x + \varphi_1) + c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)$ *(a, b, c de classe* $\mathcal{C}^1$ *à support compact) et si l'on suppose que* $1 \leqslant \lambda \ll |\omega_1| \ll \frac{\mu}{\lambda} \ll |\omega_2|$ *alors* $f = u + v + w$ *vérifie pour un certain entier j*

$$\|\Delta_j[w](x) - c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)\|_{L^1} \leqslant \epsilon = C\frac{\mu}{\lambda|\omega_2|}.$$

où Δ_j *est opérateur de type Littlewood-Paley.*



f



$c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)$

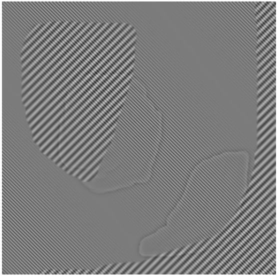
Theorem

Si $f(x) = a(x) + b(x)\cos(\omega_1 x + \varphi_1) + c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)$ *(a, b, c de classe* $\mathcal{C}^1$ *à support compact) et si l'on suppose que* $1 \leqslant \lambda \ll |\omega_1| \ll \frac{\mu}{\lambda} \ll |\omega_2|$ *alors* $f = u + v + w$ *vérifie pour un certain entier j*

$$\|\Delta_j[w](x) - c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)\|_{L^1} \leqslant \epsilon = C\frac{\mu}{\lambda|\omega_2|}.$$

où Δ_j *est opérateur de type Littlewood-Paley.*

Structures



Textures

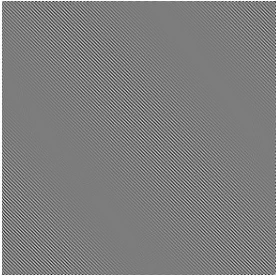
Comportement du modèle

Theorem

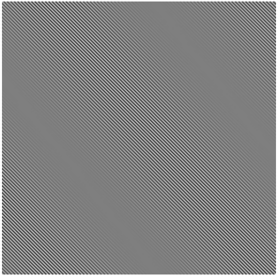
Si $f(x) = a(x) + b(x)\cos(\omega_1 x + \varphi_1) + c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)$ *(a, b, c de classe* $\mathcal{C}^1$ *à support compact) et si l'on suppose que* $1 \leqslant \lambda \ll |\omega_1| \ll \frac{\mu}{\lambda} \ll |\omega_2|$ *alors* $f = u + v + w$ *vérifie pour un certain entier j*

$$\|\Delta_j[w](x) - c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)\|_{L^1} \leqslant \epsilon = C\frac{\mu}{\lambda|\omega_2|}.$$

où Δ_j *est opérateur de type Littlewood-Paley.*

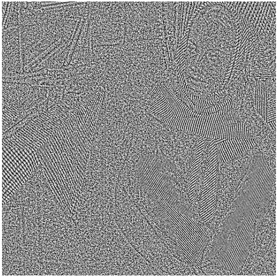


$\Delta_j[w]$



$c(x)\cos(\omega_2 x + \varphi_2)$

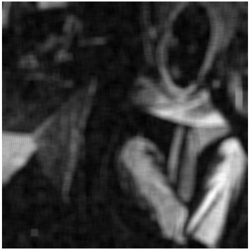
Cas des images bruitées



Modèle $u + v + w$ adaptatif: principe

- textures $\in G_{\mu_1}$ et bruit $\in G_{\mu_2}$ où $\mu_1 >> \mu_2$,

- adaptabilité locale au contenu de l'image.
  - renforcer la régularisation en l'absence de textures,
  - $\Longrightarrow \nu(i, j) \in]0; 1[$ (carte des régions),



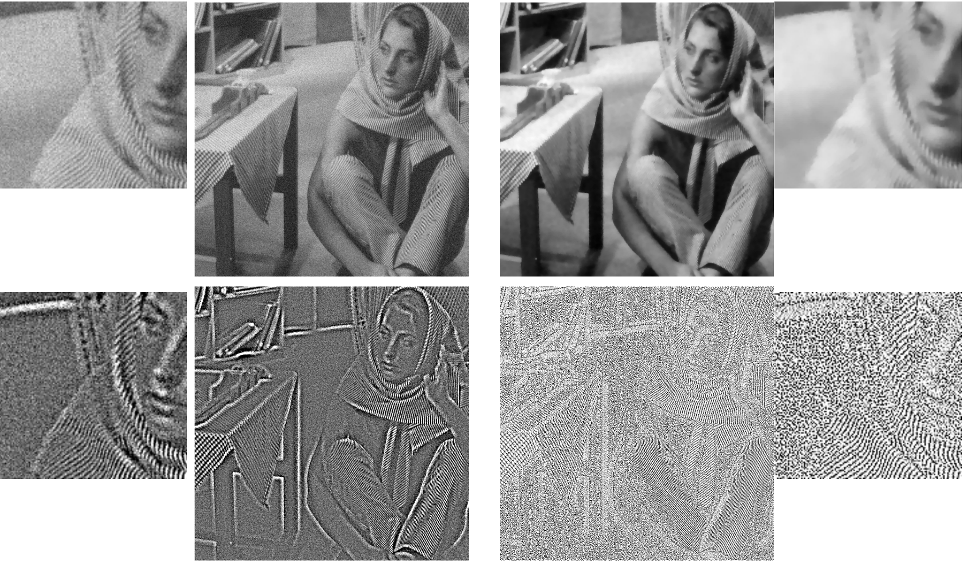
Modèle $u + v + w$ adaptatif: formulation

$$F^{JG}_{\lambda,\mu_1,\mu_2}(u,v,w) = J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu_1}\right) + J^*\left(\frac{w}{\mu_2}\right) + (2\lambda)^{-1}\|f - u - \nu_1 v - \nu_2 w\|^2_{L^2}$$

où $\nu_1 = 1 - \nu_2$ (cartes locales)

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= f - \nu_1 v - \nu_2 w - P_{G_\lambda}(f - \nu_1 v - \nu_2 w) \\
\hat{v} &= P_{G_{\mu_1}}\left(\frac{f - u - \nu_2 w}{\nu_1}\right) \\
\hat{w} &= P_{G_{\mu_2}}\left(\frac{f - u - \nu_1 v}{\nu_2}\right)
\end{aligned}$$

Modèle $u + v + w$ adaptatif: résultat



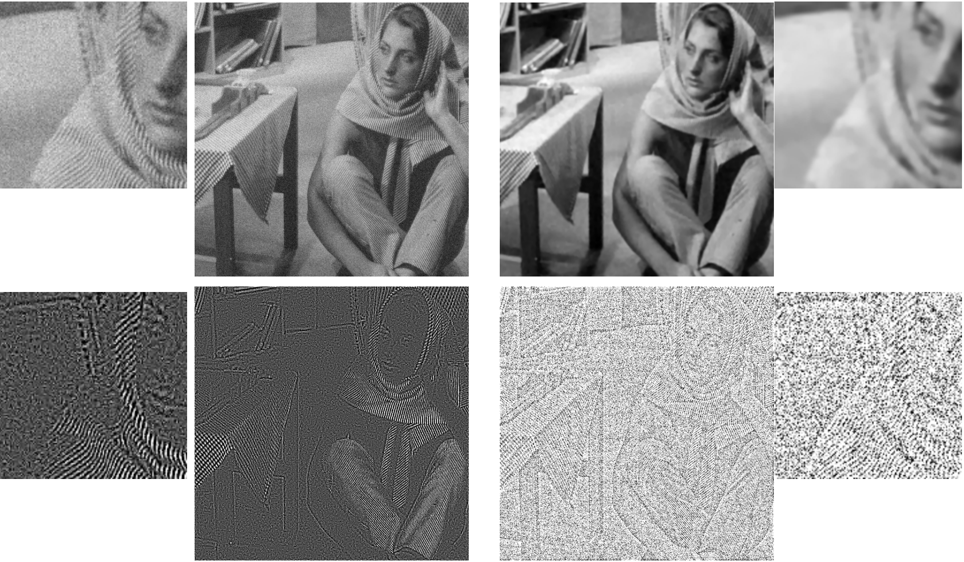
Modèle $u + v + w$ de Besov

Bruit $\Longleftrightarrow$ distribution $\in E_\delta = \left\{ w \in \dot{B}^{\infty}_{-1,\infty} / \|w\|_{\dot{B}^{\infty}_{-1,\infty}} \leqslant \delta \right\}$

$$F^{AC2}_{\lambda,\mu,\delta}(u, v, w) = J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) + B^*\left(\frac{w}{\delta}\right) + (2\lambda)^{-1}\|f - u - v - w\|^2_{L^2}$$

$$\hat{u} = f - \hat{v} - \hat{w} - P_{G_\lambda}(f - \hat{v} - \hat{w})$$
$$\hat{v} = P_{G_\mu}(f - \hat{u} - \hat{w})$$
$$\hat{w} = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - \hat{v}) = f - \hat{u} - \hat{v} - WST(f - \hat{u} - \hat{v}, 2\delta)$$

Modèle $u + v + w$ de Besov: résultat



Utilisation des contourlettes

Remplacement: ondelettes $\Longrightarrow$ contourlettes

But: apporter une meilleure prise en compte de la géométrie dans les images.

On définit alors:

- Espaces de contourlettes $CT^s_{p,q}$ et $\|.\|_{CT^s_{p,q}}$.
- Seuillage doux $\Longleftrightarrow$ projection sur $CT_\delta = \left\{ f \in CT^\infty_{-1,\infty} / \|f\|_{CT^\infty_{-1,\infty}} \leqslant \delta \right\}$.

Modèle $u + v + w$ avec contourlettes: résultat